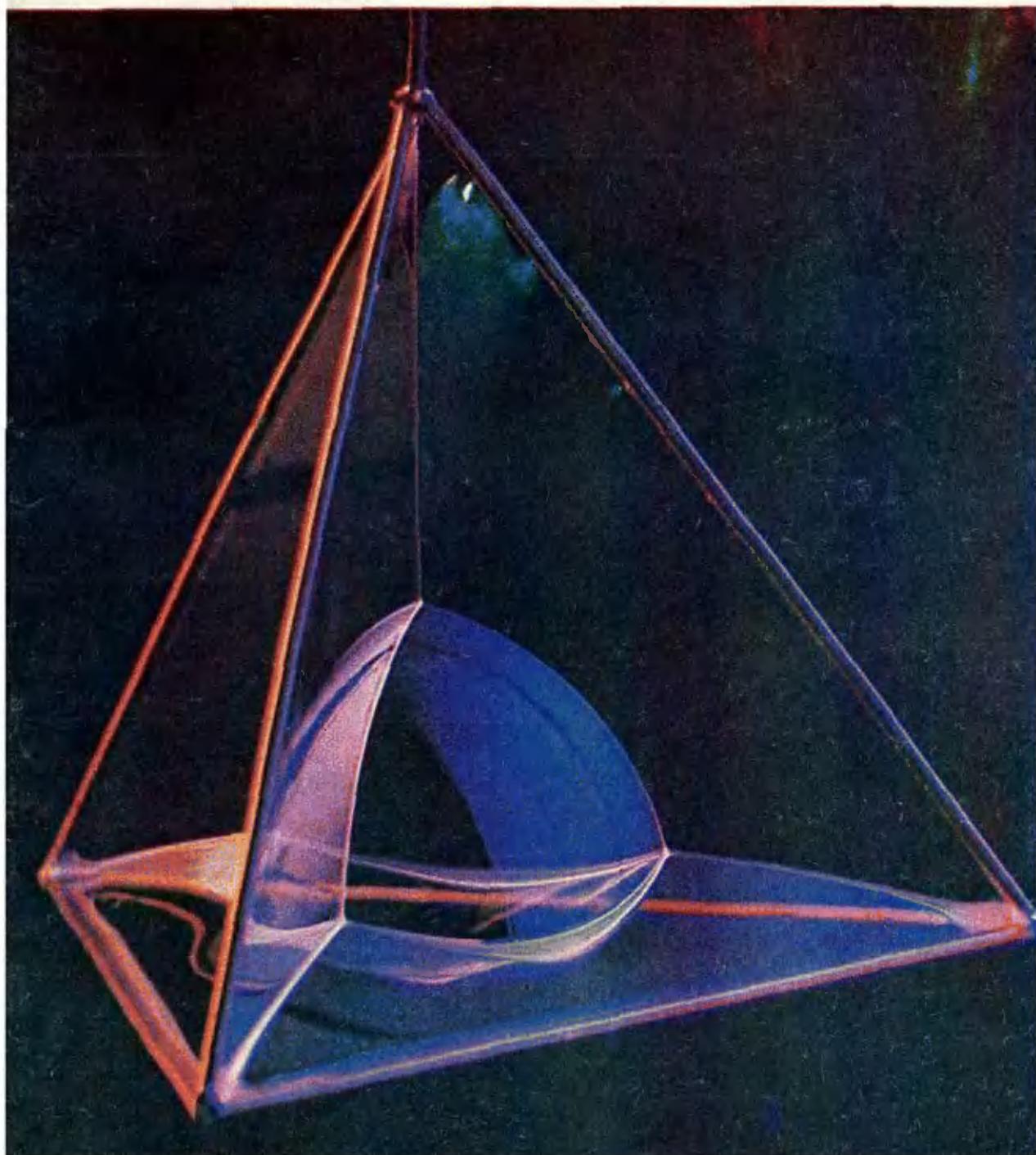


Квант

6
1983

*Научно-популярный физико-математический журнал
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР*



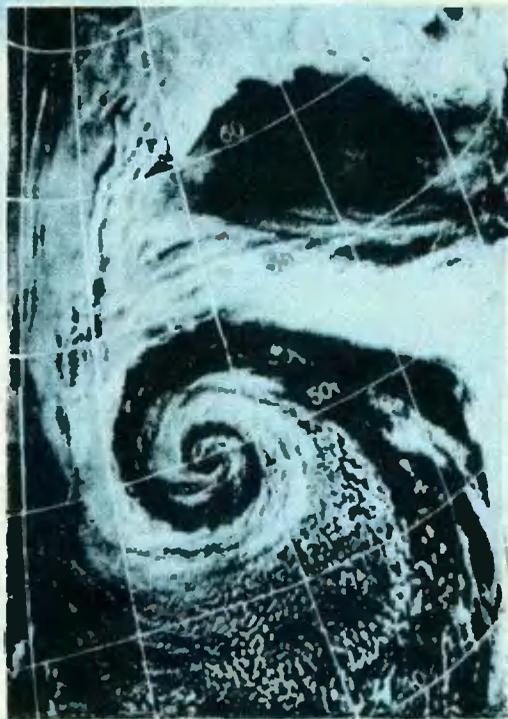


(на гравюре он справа) дважды поднимался на
исследования показали, что состав воздуха не ме-
няется вплоть до высоты 90 км.
Вы можете узнать из статьи А. В. Бялко, опубли-



В НОМЕРЕ:		IN THIS ISSUE	
2	<i>А. В. Бялко.</i> Что такое атмосфера	<i>A. V. Byalko.</i> What is the atmosphere	
10	<i>С. Г. Гиндикин.</i> О пользе чисел «поистине софистических»	<i>S. G. Gindikin.</i> On the usefulness of "truly sophistic" numbers	
18	<i>А. Т. Фоменко.</i> Минимальные поверхности	<i>A. T. Fomenko.</i> Minimal surfaces	
26	<i>Ю. В. Нестеренко, Е. М. Никишин.</i> Очерк о цепных дробях	<i>Yu. V. Nesterenko, E. M. Nikishin.</i> Essay on continued fractions	
Новости науки		Science news	
31	<i>М. Д. Франк-Каменецкий.</i> Левая спираль ДНК	<i>M. D. Frank-Kamenetski.</i> The left DNA spiral	
Лаборатория «Кванта»		Kvant's lab	
32	<i>А. А. Боровой.</i> Неоновая лампочка	<i>A. A. Borovoy.</i> The neon lamp	
Математический кружок		Mathematics circle	
35	<i>С. Н. Беспамятных.</i> Раскраска плоскости и теорема Ван дер Вардена о прогрессиях	<i>S. N. Bepamiatnykh.</i> Coloring the plane and van der Waerden's theorem on progressions	
«Квант» для младших школьников		Kvant for younger school-children	
39	Задачи	Problems	
40	<i>А. В. Токарев.</i> Дом, который построил...	<i>A. V. Tokarev.</i> The house built by...	
Задачник «Кванта»		Kvant's problems	
43	Задачи М806—М810; Ф818—Ф822	Problems M806—M810; P818—P822	
46	Решения задач М791, М792, М794, М795; Ф803—Ф807	Solutions M791, M792, M794, M795; P803—P807	
52	Список читателей, приславших правильные решения	List of readers who have sent correct solutions	
Практикум абитуриента		College applicant's section	
54	Задачи вступительных экзаменов по математике и физике в различные вузы в 1982 году	Entrance examination problems in mathematics and physics at various colleges in 1982	
62	Ответы, указания, решения Смесь (9, 53) Шахматная страничка Три эпизода с жертвой ферзя (3-я с. обложки)	Answers, hints, solutions Miscellaneous (9, 53) The chess page Three episodes with Queen sacrifices (3rd cover page)	

На первой странице обложки ледяная мыльная пленка с пузырьком, натянутая на каркас тетраэдра (об этом см. статью А. Т. Фоменко на с. 18).



Что такое атмосфера

Кандидат физико-математических наук
А. В. БЯЛКО

Взгляните на небесную лазурь — это атмосфера Земли, вдохните воздух полной грудью — это тоже она. Но что такое атмосфера с точки зрения физики? Чем определяются ее состав, ее давление и температура на разных высотах? Попробуем кратко ответить на эти вопросы.

Состав атмосферы

Вы знаете, что атмосфера Земли состоит на 78% из азота, на 21% из кислорода и на 1% из аргона. Есть еще в ней малые примеси углекислого газа, паров воды и совсем ничтожные количества неона, гелия, криптона и водорода. Но попробуем понять, почему легкая оболочка нашей планеты состоит именно из этих газов и воды.

Состав атмосферы определяется, прежде всего, геологической историей планеты. Земля, так же как и Луна, и другие планеты Солнечной системы, образовалась, как полагают, при столкновениях и слиянии малых твердых небесных тел. Первичное вещество планеты сжималось силами тяготения — Земля под действием гравитации принимала форму шара, из-за вращения чуть сплюснутого у полюсов. При сжатии недр ее разогревались. Под действием высоких температур и давления в первичном веществе происходили химические реакции. При этом более тяжелые продукты реакций опускались вниз, формируя земное ядро; более легкие образовали земную кору; а газы отделились от тверди, создав атмосферу. Затем пары воды, которой в земной атмосфере оказалось очень много, сконденсировались в океан.

Не надо думать, что все это произошло раз и навсегда в далеком прошлом Земли. Этот процесс продолжается и сейчас, хотя и не так интенсивно, как в начале эволюции. И ныне обновляется земная кора, а вулканы планеты выбрасывают в атмосферу немалые количества паров воды, углекислоты, азота. А кроме того, еще и сернистый газ, хлористый водород и другие малопривлекательные газы. Почему же их нет в нормальной атмосфере?

Ответ почти очевиден. Все газы атмосферы должны находиться в химическом равновесии и друг с другом, и с океаном, и с веществом земных пород. Поэтому кислотные окислы, выброшенные вулканами, очень быстро растворяются в океане, образуя кислоты. Взаимодействуя с основными окислами земной коры, эти кислоты дают соли. Растворимые соли растворены в океане, нерастворимые составляют осадочные породы.

Внимательный читатель, наверное, уже увидел «слабое место» этой теории. Кислород! Его нет в вулканических газах, его нет и в атмосферах других планет.

Главный источник кислорода Земли — растительность. Хлорофилл растений под действием солнечных

лучей перерабатывает углекислоту (двуокись углерода). Ее углерод входит в органические соединения, а кислород поступает в атмосферу. Есть, однако, и другой источник кислорода нашей планеты. Чтобы понять, как он действует, нужно сначала ответить на вопрос: а что же удерживает атмосферы планет, почему газы атмосферы не разлетаются в космическое пространство?

Давление воздуха у поверхности Земли равно, как известно, $p_0 = 1,013 \cdot 10^5$ Па. Это означает, что на каждый квадратный метр земной поверхности со стороны атмосферы действует сила в $1,013 \cdot 10^5$ Н. Сила эта обусловлена притяжением Земли и равна весу столба воздуха над земной поверхностью с площадью поперечного сечения 1 м^2 . Поскольку высота атмосферы мала по сравнению с радиусом Земли, можно считать, что ускорение свободного падения в пределах атмосферы постоянно и равно $g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$. Вес столба атмосферного воздуха с площадью сечения 1 м^2 равен $p_0 = m_1 g$, где m_1 (кг/м^2) — масса этого воздуха. Так что над всей поверхностью Земли площадью $4\pi R_3^2$ масса воздуха равна $m_1 \cdot 4\pi R_3^2$, то есть равна

$$m_A = \frac{p_0}{g} 4\pi R_3^2 \approx 5,3 \cdot 10^{18} \text{ кг.}$$

Как видите, масса атмосферы составляет приблизительно миллионную долю всей массы Земли $m_3 \approx 6 \cdot 10^{24}$ кг. Интересно сравнить массу атмосферы с массой воды на нашей планете: воды на Земле $1,4 \cdot 10^{21}$ кг, так что масса атмосферы в 266 раз меньше.

Сила земного тяготения не только создает давление атмосферы у поверхности. Она же препятствует разлету атмосферных газов в космическое пространство. Вы знаете, что молекулы газов находятся в состоянии хаотического, теплового движения. Средняя квадратичная скорость молекул при температуре T равна $v = \sqrt{3RT/\mu}$, где R — универсальная газовая постоянная, а μ — молярная масса газа. Давайте сравним ско-

рости молекул разных газов при температуре, скажем, 300 К со второй космической скоростью $v_{II} = \sqrt{2gR_3} = 11,2 \text{ км/с}$. Для водорода $v_{H_2} \approx 1,3 \text{ км/с}$, для гелия $v_{He} \approx 1 \text{ км/с}$, для кислорода и азота средняя скорость молекул близка к 0,5 км/с. На первый взгляд, все в порядке. Скорости газов меньше второй космической скорости. Это означает, что Земля может удержать в своей атмосфере любой из этих газов. На самом деле, газы атмосферы все же очень медленно улетучиваются в космос. Происходит это потому, что в высоких слоях атмосферы температура, как мы вскоре узнаем, намного выше, чем у поверхности Земли, она достигает 1000 К — скорости молекул там раза в два больше, чем полученные нами оценки. С другой стороны, мы оценивали средние скорости молекул. При тепловом равновесии со скоростями, близкими к средней, движется подавляющее большинство молекул. Однако всегда имеется малая доля молекул, скорости которых значительно превышают среднюю и достигают значения второй космической скорости. Эти-то быстрые молекулы и могут покинуть Землю.

При данной температуре наибольшие средние скорости имеют молекулы водорода и гелия. Им легче других газов улететь в космос, им легче и подняться на большие высоты. Казалось бы, количество этих газов в атмосфере должно непрерывно убывать. Но этого не происходит. Почему?

Есть, оказывается, процессы, поддерживающие содержание этих легких газов. Гелий образуется в земной коре при распаде тяжелых радиоактивных элементов. А водород верхней атмосферы образуется из воды. Под действием ультрафиолетового излучения Солнца молекулы H_2O на высотах больше 50 км распадаются на водород и кислород. Таким образом, улетучивание водорода в космос приводит к убыли воды на Земле и к возрастанию содержания кислорода в атмосфере.

Каждую секунду из атмосферы улетает примерно 1 кг водорода.

Много это или мало? Прикинем, надолго ли хватит воды в океанах и ледниках планеты (напомним, что масса этой воды $1,4 \cdot 10^{21}$ кг). В 9 кг воды содержится 1 кг водорода. Следовательно, земной воды достаточно на $1,5 \cdot 10^{20}$ с, или на 5000 миллиардов лет. Так что океан можно считать неисчерпаемым, ведь возраст Земли — «всего» 4,5 миллиарда лет.

Таким образом, воды Земли — еще один источник атмосферного кислорода. А теперь оценим, сколько кислорода образовалось за время существования Земли. Разумеется, это будет очень грубая оценка — нельзя на самом деле считать, что Солнце все это время светило так же, как сейчас. Но попробуем. Итак, 8 кг в секунду за 4 миллиарда лет дадут нам 10^{18} кг кислорода — как раз столько, сколько его в нашей атмосфере и содержится, пятая часть массы атмосферы.

Не нужно переоценивать это совпадение. Ведь гораздо больше, чем его содержится на сегодняшний день в атмосфере, потребовалось кислорода для того, чтобы привести к современному состоянию химическое рав-

новесие Земли — чтобы окислить метан и аммиак первичной атмосферы, чтобы окислить все породы земной коры. Без растений это было бы невозможно. Они производят по порядку величины 10^{14} кг кислорода в год, или $3 \cdot 10^6$ кг в секунду. Но содержание кислорода в атмосфере сейчас не увеличивается — весь кислород, создаваемый растениями, расходуется на дыхание животных и окисление вулканических газов.

Из всего сказанного вам, должно быть, стало ясно, что состав атмосферы зависит от высоты. Действительно, земная атмосфера имеет одинаковый состав (хорошо перемешана) только ниже 90 км. Эта ее часть называется гомосферой. Выше лежит гетеросфера — часть земной атмосферы, состав которой меняется с высотой. Выше 700 км атмосфера Земли состоит практически только из гелия и водорода. В основном, эти газы и улетучиваются в космос.

Рисунок 1 дает наглядное представление о том, как меняются с высотой концентрации отдельных газов и полная концентрация молекул в атмосфере.

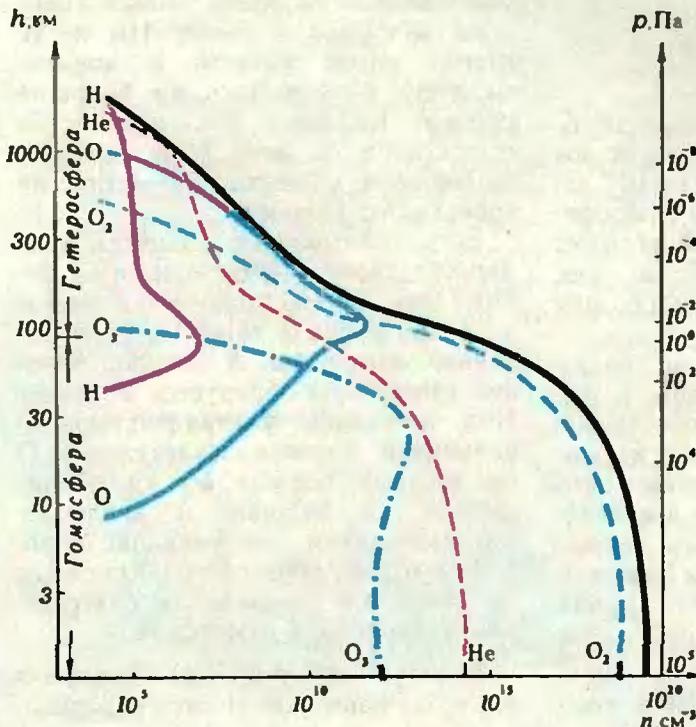


Рис. 1. Изменение с высотой концентрации молекул некоторых газов (цветные кривые) и полной концентрации молекул (черная кривая) в атмосфере.

В гомосфере концентрации большинства газов убывают одинаково. Выше 90 км содержание газов начинает существенно зависеть от высоты. Под действием ультрафиолетового излучения Солнца кислород распадается на атомы, и на высотах 200–600 км атомарный кислород становится наиболее распространенным газом атмосферы. Еще выше атмосфера Земли становится преимущественно гелиевой; и, наконец, на тех высотах, где происходит улетучивание газов в космос, в атмосфере больше всего водорода.

Обратите внимание на поведение кривой для озона (O_3) на высоте 20–50 км. Дальше вы узнаете, почему этот слой важен для нас.

Тепловое равновесие планет

Мы видели, что от температуры зависит поток газов, улетучивающихся в космос. Но прежде всего температура атмосферы интересует нас, жителей Земли с практических позиций — от нее сильно зависят условия жизни.

Главный источник тепловой энергии Земли — Солнце. Человечество признавало это всегда. Вот как, например, писал русский поэт Александр Сумароков в 1760 году:

О Солнце, ты — живот и красота природы,
Источник вечности и образ божества!
Тобой жива земля, жив воздух, живы воды,
Душа времен и вещества!

Попробуем дать количественную оценку этих вечных истин. Солнце — раскаленный термоядерными реакциями шар радиуса $R_c = 6,96 \times 10^8$ м; температура поверхности Солнца $T_c = 5800$ К.

Всем хорошо известно, что раскаленные тела светятся, излучают энергию. В конце прошлого века австрийские физики Стефан и Больцман открыли закон излучения: поток энергии, то есть энергия, излучаемая за единицу времени с единицы площади поверхности тела, находящегося в состоянии теплового равновесия (имеющего постоянную температуру), пропорционален четвертой степени температуры: $\epsilon = \sigma T^4$, где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м² · К⁴) — коэффициент пропорциональности, который называют постоянной Стефана—Больцмана.

Солнце не находится в полном тепловом равновесии, но для него закон Стефана—Больцмана приближенно выполняется. Согласно этому закону, мощность, излучаемая Солнцем, равна

$$P_c = 4\pi R_c^2 \sigma T_c^4 \approx 3,8 \cdot 10^{26} \text{ Вт.}$$

Эта мощность излучается равномерно по всем направлениям. Нетрудно подсчитать, какая ее часть попадает на Землю. На расстоянии $R = 1,5 \times 10^{11}$ м, равном радиусу земной орбиты, на каждый квадратный метр поверхности, перпендикулярной лучам, попадает мощность $P_c/4\pi R^2$.

Земля «затеняет» на такой поверхности площадь πR_3^2 . Следовательно, мощность, попадающая от Солнца на Землю, равна

$$P = P_c \frac{\pi R_3^2}{4\pi R^2} = 1,75 \cdot 10^{17} \text{ Вт.}$$

Куда расходуется эта мощность? Часть ее отражается Землей в космос. Все знают, что планеты и Луна видны на звездном небе именно благодаря отраженному солнечному свету. Точно так же, удалясь в космическое пространство, можно видеть и свет, отражаемый Землей. Доля отраженной световой мощности называется альбедо (от латинского *albus* — белый; альбедо — это как бы степень белизны). Точность, с которой нам сейчас известно альбедо нашей планеты, невелика. Считается, что альбедо Земли A лежит в пределах от 28 до 36 процентов. А куда девается остальная энергия $P(1-A)$? Ясно, что именно она и является причиной того, что на нашей планете тепло. Однако солнечное излучение поступает к Земле постоянно, и если бы никакого отвода энергии не было, то температура планеты постоянно росла бы. Следовательно, теплоотвод существует. Осуществляется он точно тем же физическим процессом, что и излучение самого Солнца. Да, представьте себе, и Земля, и остальные планеты тоже являются источниками излучения. Но спектр этого излучения лежит в невидимой глазу области, в инфракрасном диапазоне.

Давайте вычислим температуру равновесного теплового излучения Земли, считая ее альбедо равным 0,28 (таковы последние измерения со спутников). Нам надо приравнять мощность поглощаемого Землей солнечного излучения $P(1-A)$ мощности теплового излучения Земли. Если температура Земли T_3 , то излучаемая с ее поверхности мощность равна $4\pi R_3^2 \sigma T_3^4$. Итак,

$$P(1-A) = 4\pi R_3^2 \sigma T_3^4,$$

откуда

$$T_3 = \left(\frac{P(1-A)}{4\pi R_3^2 \sigma} \right)^{1/4} = 258 \text{ К} = -15 \text{ }^\circ\text{C.}$$

Неплохой морозец! Но ведь мы

знаем, что среднегодовая температура умеренных широт Земли выше нуля, а немалую долю земной поверхности занимают тропики, где температура и летом, и зимой редко опускается ниже плюс 25°C . В чем же дело? Может быть, у Земли есть какой-нибудь собственный источник тепловой энергии?

Да, такой источник действительно есть. Это недра Земли. С каждым километром в глубь земной коры температура возрастает в среднем на 30 градусов. Разогрев этот происходит в основном за счет энергии, выделяющейся при распаде тяжелых радиоактивных элементов. Однако расчеты показывают, что тепловой поток, попадающий в атмосферу из земных недр, в 6 тысяч раз меньше, чем поток солнечного излучения. Так что на климате нашей планеты тепло земных недр не сказывается.

Почему же средняя температура земной поверхности остается постоянной и не падает до -15°C , соответствующих тепловому равновесию?

«Слоеный пирог» атмосферы

Оказывается, тепло в космос излучает не сама земная поверхность, а окружающий ее воздух, атмосфера. На первый взгляд это кажется странным — ведь воздух прозрачен. Но спектр излучения при температуре около 300 K лежит в далекой инфракрасной области. О свойствах веществ пропускать излучение с такими длинами волн мы не можем сказать ничего, опираясь только на свои ощущения. А измерения инфракрасными спектрометрами показывают следующее: основные газы воздуха — азот, кислород и инертные газы — прозрачны и в инфракрасном диапазоне, однако углекислый газ и пары воды, присутствующие в атмосфере в малых количествах, поглощают инфракрасное излучение так сильно, что именно они и определяют радиационные свойства земной атмосферы и Земли в целом.

Тепловое излучение Земли испускается слоями атмосферы на высоте

6 — 12 км. Именно на этих высотах средняя температура $\sim 258\text{ K}$. Представьте себе космического пришельца, который видит только инфракрасный свет. Для него Земля выглядела бы светящимся шаром с радиусом, чуть большим истинного, а настоящую земную поверхность он мог бы видеть очень редко: около южного полюса во время полярной ночи или зимой в северном полушарии в Восточной Сибири. Происходит это потому, что только при очень сильных морозах воздух становится так сух, что атмосфера прозрачна уже и в инфракрасном свете.

Та часть атмосферы, которая лежит под поверхностью инфракрасного излучения, называют тропосферой. Тропосфера содержит около 80% всей массы атмосферы Земли. Вы ведь знаете, давление падает с подъемом. На высоте Эвереста, примерно совпадающей с высотой радиационной поверхности, давление воздуха составляет только одну пятую нормального давления. Это и означает, что выше лежит одна пятая массы атмосферы. Тропосфера — наиболее практически важная для нас часть атмосферы. Ее движение определяет все явления погоды. Все обычные облака тоже лежат в тропосфере — выше паров воды очень мало. Поэтому состоянием тропосферы определяются осадки — дождь, снег, град.

Строго говоря, к тропосфере относят и область, лежащую на 2 — 3 км выше поверхности инфракрасного излучения, ту область, где температура воздуха продолжает падать с подъемом.

А выше 15 км температура атмосферы начинает расти! И достигает она до 270 K , то есть снова почти до нуля градусов Цельсия, на высоте около 50 км. Этот слой атмосферы называют стратосферой. Но отчего же температура в стратосфере растет?

Оказывается, тепловую энергию этому слою сообщают химические реакции, происходящие под действием ультрафиолетового излучения Солнца. Это — реакция разложения кислорода на атомы и реакция

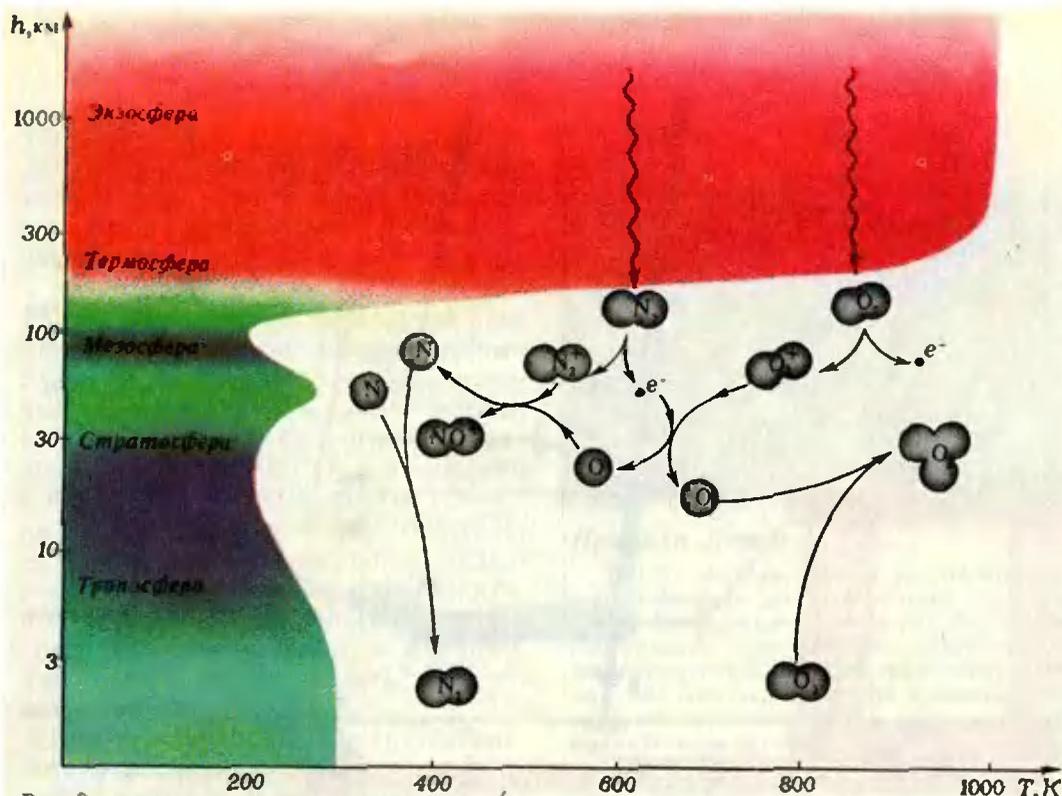


Рис. 2.

образования молекул озона O_3 . Слой повышенной концентрации озона в стратосфере (мы отметили его, обсуждая рисунок 1) служит как бы экраном, не пропускающим к земной поверхности губительное для всего живого ультрафиолетовое излучение Солнца.

Озонный слой необходим Земле, но он непрочен. Озон частично разрушается от образования в стратосфере окислов азота при ядерных взрывах в атмосфере, при мощных извержениях вулканов и даже при запуске ракет. Опасны для озонного экрана и содержащие хлор и фтор органические газы, которыми наполняют аэрозольные баллончики и хладобменники холодильников. Большинство этих воздействий на озонный слой вызвано деятельностью человека. Их суммарный эффект должен быть ограничен, поскольку озон стратосферы восстанавливается медленно.

Выше 55 км температура воздуха падает. Она опускается до 187 К на высоте 90 км над поверхностью Земли. Этот слой атмосферы называется мезосферой. Падение температуры в мезосфере происходит в результате того, что воздух в ней слабо поглощает солнечный свет.

Выше, над мезосферой, лежат термосфера и экзосфера Земли. В термосфере температура начинает резко возрастать и достигает значений около 1000 К на высотах 350—400 км*). Происходит это в результате поглощения основными газами атмосферы — кислородом и азотом — ультрафиолетового излучения Солнца. Над термосферой температура не меняется с высотой. Это — экзосфера, переходная область между атмосферой Земли и космосом, та часть атмосферы, где происходит убежание от Земли водорода, гелия и в очень малых количествах остальных газов.

Вот так устроен «слоеный пирог» земной атмосферы (рисунок 2).

Потоки энергии в атмосфере

Падающая на Землю энергия солнечных лучей перераспределяется разными слоями атмосферы Земли и ее твердой или жидкой поверхностью. Как это происходит, понятно из рисунка 3, где прослеживается

*) Эту температуру нельзя измерить термометром: плотность газа термосферы и экзосферы настолько мала, что тепловое равновесие между газом и термометром никогда не устанавливается. Температура в данном случае измерится по средней кинетической энергии молекул газа.

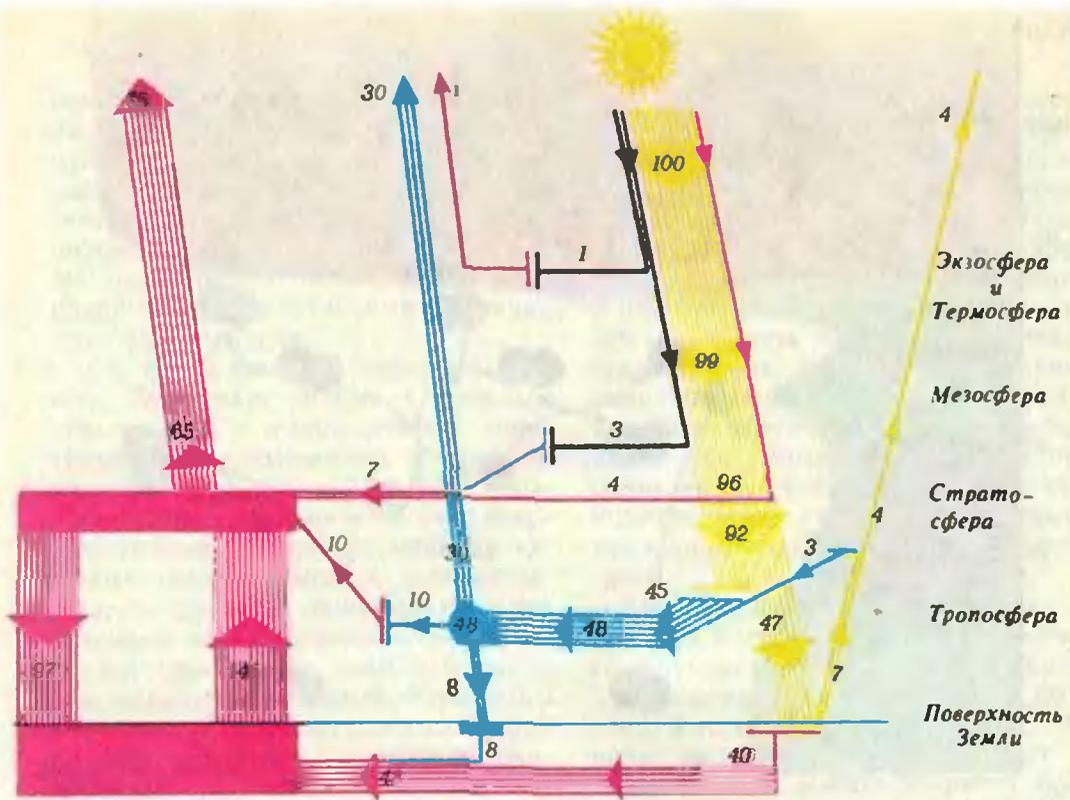


Рис. 3. Тепловой баланс в атмосфере. Один процент солнечной мощности поглощается молекулами в экзосфере и термосфере. Еще три процента поглощаются озоном стратосферы. Верхние слои тропосферы, содержащие пары воды, поглощают инфракрасную часть солнечного спектра. Остается 92 единицы первоначальной мощности.

Эта мощность, большая часть которой приходится уже на видимый диапазон, проникает в плотные приземные слои воздуха. Значительная часть ее — около 45 единиц — рассеивается в воздухе. Прямые солнечные лучи — оставшиеся 47 единиц начального светового потока — достигают непосредственно поверхности Земли. Она отражает вверх примерно 7 единиц. Оставшиеся 40 единиц поглощаются поверхностью Земли, нагревая сушу и океан.

путь 100 условных единиц солнечной мощности, падающей на Землю.

Обратите внимание на то, что на рисунке изображен тепловой поток в 145 единиц, исходящий от земной поверхности, тогда как исходный поток солнечной энергии был равен только 100 единицам. Так, до некоторой степени условно, отражен тот факт, что средняя температура земной поверхности равна $+15^{\circ}\text{C}$, или 288 К, и тепловой поток, излучаемый с поверхности Земли, примерно в 1,45 раз больше, чем те начальные 100 единиц, которые дает нам Солнце. Но в космос уходит только часть этого излучения. Остальная энергия — 97 единиц — постоянно

рассеивается в атмосфере световая мощность (всего 48 единиц) частично поглощается ею (10 единиц), и остальное распределяется между поверхностью Земли и космосом. При этом в космическое пространство уходит больше энергии, чем попадает вниз, на поверхность, — целых 30 процентов первоначального потока.

У нас осталось 65 единиц мощности, поглотившихся и перешедших в тепло в атмосфере и на поверхности Земли: 3 из них для озона, 4 — пары воды верхней тропосферы, 10 — поглотившиеся в основной толще атмосферы и, наконец, 48 перешли в тепло в почве и водах океана. Все эти 65 единиц мощности в конечном счете перешли в тепло и излучаются в космос уже не в видимом и ультрафиолетовом диапазонах, а тепловой радиацией.

циркулирует между поверхностью Земли и тропосферой.

Этот механизм прогрева земной поверхности и нижних слоев атмосферы называют иногда парниковым эффектом. Действительно, очень похоже на парник. Солнечные лучи тоже легко проникают через прозрачное покрытие парника, нагревая почву и воздух. Но уйти теплу трудно — стекло или пластиковая пленка парника не пропускают вверх ни теплый воздух, ни инфракрасное излучение; поэтому охлаждение парника происходит медленно. Точность, с которой нам сегодня известны тепловые потоки, изображенные на рисунке 3, невелика.

Тем не менее такой тепловой баланс разумно объясняет, почему температура земной поверхности выше равновесной температуры излучения Земли.

Как уже говорилось, парниковый эффект возникает за счет малых примесей в атмосфере Земли водяных паров и двуокиси углерода, которые не пропускают в космос инфракрасное излучение от земной поверхности. Содержание CO_2 в атмосфере сейчас равно 0,0337%. А всего 20 лет назад оно было меньше: 0,0318%. Это возрастание произошло вследствие все увеличивающегося сжигания органических топлив: нефти, угля, газа. Так не будет ли парниковый эффект все возрастать? Не грозит ли Земле перегрев?

Конечно, дополнительная углекислота атмосферы способствует потеплению климата. Климат, однако, зависит не только от нее. К тому же надо отметить, что количество CO_2 в атмосфере возрастает отнюдь не так быстро, как сжигается топливо — подавляющая часть дополнительной углекислоты растворяется в океане и поглощается растениями при фотосинтезе. Океан содержит растворенной углекислоты в 30—100 раз больше ее атмосферной массы и способен поглотить еще очень много. Увеличение доли углекислоты в атмосфере связано с тем, что процесс растворения ее в океане медленный по сравнению с поступлением CO_2 от сжигания органических топлив. В ближайшие 50—100 лет нефтяные ресурсы истощатся, и человечество будет вынуждено перейти к атомной энергетике. Тогда проблема атмосферной углекислоты будет решена автоматически.

От редакции. Разумеется, в небольшой статье нельзя подробно рассказать о многих физических явлениях, происходящих в атмосфере Земли. Тем, кого интересуют эти вопросы, мы советуем прочитать книгу А. В. Бялко «Наша планета — Земля», которая выходит в издательстве «Наука» в серии «Библиотечка Квант».

Наш календарь



Правило Ленца

В 1831 году английский ученый Фарадей открыл явление электромагнитной индукции, явление, которое наглядно проиллюстрировало возможность «превращения магнетизма в электричество». В опытах Фарадея индукционный ток возникал либо при движении проводников друг относительно друга, либо при относительном движении проводника и магнита. Для определения направления тока Фарадей сформулировал два соответствующих правила: 1) электрический ток вызывает в приближаемой к нему параллельной проволоке ток противоположного направления, а в удаляемой — ток того же направления; 2) магнит вызывает в перемещающемся около него проводнике ток, зависящий от направления, в котором проводник в своем движении пересекает магнитные силовые линии.

Ознакомившись с работами английского ученого, экстраординарный академик Петербургской Академии наук Эмилий Христианович Ленц (1804—1865) расценил эти правила как неудовлетворительные. Действительно, они имели чисто геометрическое содержание, описывали лишь частные случаи и не охватывали всего явления в целом.

Взамен этому Ленц предложил одно общее правило, с помощью которого можно определить направление индуцированного тока независимо от того, как наводится ток — движением проводника или магнита, включением или выключением тока в соседнем проводнике. Вот это правило в том виде, в каком Ленц сформулировал его 29 ноября 1833 года, когда на заседании Петербургской Академии впервые сообщил о своем открытии:

«Если металлический проводник движется вблизи от гальванического тока или магнита, то в нем возбуждается гальванический ток такого направления, что если бы данный проводник был неподвижным, то ток мог бы обусловить его перемещение в противоположную сторону; при этом предполагается, что покоящийся проводник может перемещаться только в направлении движения или в противоположном направлении». Справедливость предложенного им правила Ленц надежно подтвердил целой серией убедительных экспериментов.

Конечно, эта формулировка не так лаконична, как эквивалентная ей современная формулировка правила Ленца.

Б. Е. Явлов



О пользе чисел «поистине софистических»

Кандидат физико-математических наук
С. Г. ГИНДИКИН

Многовековая история развития представлений человека о числах — одна из самых ярких сторон развития человеческой культуры. В стремлении расширить мир чисел трудноразгадываемым образом переплелись разнообразные мотивы.

Дроби появились очень рано — уже у египтян и вавилонян — по-видимому, в связи с переходом к более мелким долям измерения. Их связь с делением натуральных чисел понималась более смутно и вторично.

Греки осознавали числа через процесс геометрического измерения: именно так они уяснили себе существ-

ование иррациональных чисел (несоизмеримость диагонали квадрата и его стороны) и построили теорию «величин» (как мы сказали бы сегодня, теорию положительных действительных чисел) — одну из вершин греческой геометрии. Характерный штрих: «числамн» назывались лишь натуральные числа, а их расширение — «величинами». Вычислительный аспект отодвигался на второй план и обычно не считался достойным внимания ученого. Платон, энергично заботившийся о том, чтобы практические задачи не оскверняли подлинного духа геометрии, смеялся над вычислителями, «которые разменивают единицу на мелкую монету» (занимаются делением).

Отрицательные числа появились в V—VI веках в индийской и арабской математике, где на первый план выдвинулась вычислительная сторона дела. И хотя довольно рано была осознана возможность интерпретировать отрицательные числа, скажем, как долг в задачах коммерческого содержания, практика пока-

звала, что ими удобно пользоваться чаще, чем такая интерпретация возможна. Сильно упрощая, можно сказать, что вычислители рассматривали отрицательные числа как «воображаемые», ненастоящие числа, которыми удобно пользоваться в промежуточных вычислениях как результатом вычитания, когда оно невыполнимо в области положительных чисел. При этом важно было убедиться, что не нарушаются «правила гигиены»: можно доверять окончательному положительному ответу. Ни о каком равноправии отрицательных чисел с положительными речь не шла: в окончательном ответе, кроме простейших ситуаций, отрицательные числа не появлялись. Об отношении к ним выразительно говорят разные варианты их названий: «ложные», «фиктивные», «абсурдные», «невозможные», «мнимые».

Впрочем, последний термин позднее пришлось «уступить» другому классу чисел, который удивительным образом появился в европейской математике одновременно с первым серьезным рассмотрением отрицательных чисел. Этот историко-математический парадокс связан с Джероламо Кардано (1501—1576), яркой и противоречивой личностью с повышенной склонностью к фантазиям и мистике, что нередко далеко заводило его в ложном направлении. Однако более практичный и острожный человек вряд ли решился бы в то время на построения, которым математика обязана Кардано.

Главные результаты Кардано относятся к исследованию формулы для решения кубического уравнения, которую впервые получил дель Ферро (1465—1526) и которую Кардано узнал от Тарталья (1500?—1577) (подробнее об этом см. в моей книге «Рассказы о физиках и математиках» (М., «Наука», 1981)).

Напомним, что общее кубическое уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ заменой $x = y - \frac{a}{3}$ приводится к виду

$$x^3 + px + q = 0. \quad (1)$$

Будем искать решение уравнения (1) в виде $x = y_1 + y_2$. Тогда $x^3 = y_1^3 +$

$+ y_2^3 + 3y_1y_2$. Сопоставляя с (1), мы видим, что если y_1 и y_2 удовлетворяют равенствам $3y_1y_2 = -p$, $y_1^3 + y_2^3 = -q$, то $x = y_1 + y_2$ является решением уравнения (1). Такие y_1, y_2 легко найти: если $t_1 = y_1^3, t_2 = y_2^3$, то по теореме Виета t_1 и t_2 являются корнями квадратного уравнения $t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$.

$$\text{то есть } t_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

откуда

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (2)$$

формулу (2) называют сейчас *формулой Кардано*.

Вспомним теперь, что Кардано вел свои рассуждения в рамках положительных чисел. (Кроме того, он не владел алгебраической символикой, что невероятно усложняло дело, особенно при попытках формулировать общие правила. Однако этот тип трудностей мы не будем здесь имитировать.) Поэтому Кардано изучает отдельно уравнения

$$x^3 + ax = b, \quad (3)$$

$$x^3 = ax + b, \quad (4)$$

$$x^3 + b = ax, \quad (5)$$

где a, b положительны. Четвертый формально возможный тип $x^3 + ax + b = 0$ он не рассматривает, так как такое уравнение, очевидно, не имеет (положительных!) корней.

Дель Ферро придумал правило для решения (3). Тарталья перетрял это правило и придумал правило для решения (4); он сформулировал оба правила в виде стихотворения, которое и было сообщено Кардано.

Говоря прозой, речь идет о том, что решение ищется в виде $x = \sqrt[3]{u} \mp \sqrt[3]{v}$ (минус для (3), плюс для (4)), где соответственно, $u \mp v = b, uv = \left(\frac{a}{3}\right)^3$ (ср. с (2)).

Уравнение (3) всегда имеет единственный действительный корень, причем этот корень всегда положителен (сегодня в этом легко убедиться по графику) и благопо-

лучно находится по указанному правилу.

В (4) также всегда имеется единственный положительный корень x , причем всегда $x > \sqrt{a}$ (почему?).

Если $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27} > 0$ (это

равносильно тому, что $x < \frac{4a}{3}$),

то корень находится по формуле (2). В этом случае других действительных корней нет. Если же $\Delta < 0$, то в (2) под квадратным радикалом стоит отрицательное число и формула отказывает. На самом деле в этом случае (он был назван *неприводимым*) кроме одного положительного имеется два отрицательных корня (быть может, кратных). Тарталья несомненно знал на примерах, что и при $\Delta < 0$ положительный корень u уравнения (4) может существовать, а Кардано недвусмысленно утверждал существование корня в общем случае. Неприводимый случай уравнения (4) доставил много волнений и Тарталье и Кардано, но способ находить корень так и не был найден!

Что касается уравнения (5), то оно легко сводится к (4): корни (5) отличаются от корней (4) знаком, и, стало быть, при $\Delta = \frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27} > 0$ у (5) нет положительных корней, а при $\Delta < 0$ (в неприводимом случае) имеются два положительных корня (и один отрицательный). Но такой тип рассуждений был за пределами возможностей математиков XVI века. Тарталья пишет, что решение (5) сводится к решению (4), но не делает никаких намеков на способ сведения.

Кардано придумал способ перейти от (5) к (4), довольно близкий к подстановке $x = -u$. Мы ищем положительный корень x уравнения (5). Пусть y — положительный корень уравнения (4); он всегда существует, причем $y > \sqrt{a}$ и, в неприводимом случае, $y < \sqrt{\frac{4a}{3}}$. Складывая (4) и (5), получаем $x^3 + y^3 = a(x+y)$, откуда $x^2 - xy + y^2 = a(x+y) \neq 0$ в положительной области),

$x_{1,2} = \frac{y}{2} \pm \sqrt{a - \frac{3y^2}{4}}$. В результате

при $y < \sqrt{\frac{4a}{3}}$, то есть в неприводимом

случае ($\Delta < 0$), мы выражаем через положительный корень y уравнения (4) два положительных корня уравнения (5) (их положительность следует из неравенства $y > \sqrt{a}$). Кардано замечает, что $y = x_1 + x_2$, то есть в неприводимом случае положительный корень уравнения (4) равен сумме положительных корней уравнения (5).

Таким образом, изучая уравнение (5), Кардано сумел остаться в рамках положительных корней. Но именно в результате этих рассуждений он понял ту роль, которую играют отрицательные корни. Он понял, что у уравнения (5) всегда имеется «ложный» (отрицательный) корень $-y$. что при $\Delta < 0$ сумма всех его корней, включая «ложный», равна нулю, что для справедливости этого утверждения при $\Delta = 0$ надо считать, что уравнение (5) имеет кратный положительный корень, что уравнение (4) в неприводимом случае имеет два «ложных» корня и что сумма всех его корней в этом случае тоже равна нулю.

Утверждение о сумме корней уравнения, имеющего три корня (считая «ложные»), Кардано обобщил на общие кубические уравнения: сумма корней знаком отличается от коэффициента при x^2 . (Надо сказать, что известная теорема Виета, относящаяся к корням квадратного уравнения, была получена позднее.) Кардано первым работал с отрицательными корнями, причем он не просто обратил внимание на возможность их рассмотрения — он показал, сколь гармонично они входят в теорию алгебраических уравнений. С этих результатов Кардано началась алгебра в современном смысле слова.

Результаты Кардано были собраны в его книге «Великое искусство или о правилах алгебры», вышедшей в 1545 г. Глава XXXVII этой книги носит название «О правиле рассмотрения ложного неизвестного». И если первое правило в этой главе относится к отрицательным корням, то второе правило гласит: «Второй вид ложного решения

уравнения заключается в корне из отрицательного количества. Я приведу пример. Если кто-нибудь потребует, чтобы разделить 10 на две части, которые по перемножении дали бы 30 или 40, то ясно, что этот случай или вопрос невозможен. Но мы поступим так: разделим 10 пополам, половина будет 5; умноженная на самое себя, она даст 25. Затем вычти из 25 то, что должно получиться по перемножении, скажем 40, как я объяснял тебе это в главе о действиях в 4-й книге; тогда останется $m:15$; если взять от этого R и прибавить к 5 и вычесть из 5, то получаются части, которые, перемноженные между собой, дадут 40. Таким образом, части эти будут $5p:Rm:15$ и $5m:Rm:15$. Текст этот нетрудно расшифровать. Речь идет об уравнении $x(10-x)=40$, то есть $x^2-10x+40=0$. Утверждается, что его корнями будут $5 \pm \sqrt{25-40} = 5 \pm \sqrt{-15}$. Читатель без труда восстановит обозначения, которыми пользуется Кардано.

Так впервые появились в математике комплексные числа, которые Кардано называл «поистине софистическими». Новыми числами Кардано совершенно не пользовался и, похоже, относился к ним не без подозрения.

Во всем этом есть один интригующий момент. Нередко высказывают предположение (например, Н. Бурбаки), что Кардано придумал комплексные числа, пытаясь разобраться с неприводимым случаем кубического уравнения. Дело в том, что если в формуле (2) при $\Delta < 0$ не побояться извлечь квадратный корень из отрицательного числа, то в последующих операциях мнимые части уничтожаются и в результате получается правильный ответ, являющийся действительным числом*). Таким образом, обращение к комплексным числам не только позволяет оправдать формулу Кардано в общем случае, но они неминуемо возникают в задаче определения действительных корней кубического уравнения с действительными коэф-

фициентами. Было бы очень логично, если бы Кардано ввел комплексные числа по этой причине. Но никаких свидетельств того, что при работе с комплексными числами Кардано выходил за пределы квадратных уравнений, нет. В реальных исторических фактах часто не удается обнаружить «естественных» связей!

Связь комплексных чисел с неприводимыми кубическими уравнениями была обнаружена, если и не Кардано, то очень скоро. Это было сделано непосредственным преемником Кардано, инженером из Болоньи Рафаэлем Бомбелли (около 1530—1572), автором знаменитой «Алгебры», вышедшей в 1572 г. Среди многих замечательных результатов в «Алгебре» имеется систематическое изучение комплексных (и отрицательных) чисел. У Бомбелли можно найти соотношения

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1},$$

$$\sqrt[3]{52 + \sqrt{-2209}} = 4 + \sqrt{-1}.$$

Интересно, что Бомбелли вводит специальное наименование для i («*riu de meno*»; i он называет «*riu*»). Бомбелли уверенно применяет комплексные числа к неприводимому кубическому уравнению.

В формуле Кардано фигурируют

выражения вида $\sqrt[3]{\alpha \pm \sqrt{\beta}}$, где β может быть любого знака; эти выражения и исследует Бомбелли. Пусть

$$\sqrt[3]{\alpha \pm \sqrt{\beta}} = u \pm \sqrt{v} \quad (\text{значит, из (2) } x=2u). \quad \text{Тогда } u^3 + 3uv = \alpha, \quad u^2 - v =$$

$$= \sqrt[3]{\alpha^2 - \beta} \quad \text{и, если положить } \gamma =$$

$$= \sqrt[3]{\alpha^2 - \beta}, \quad \text{для } u, \text{ независимо от}$$

$$\text{знака } \beta, \text{ возникает уравнение } 4u^3 =$$

$$= 3\gamma u + \alpha. \quad \text{В частности, в формуле}$$

$$\text{Кардано для уравнения (4) имеем}$$

$$\alpha = \frac{b}{2}, \quad \beta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{a}{3}, \quad \gamma = \frac{a}{3}.$$

Теперь, с одной стороны, понятно, как действительный корень выражается через кубические корни из комплексных чисел ($x=2u$), но, с другой стороны, выражения для x через действительные радикалы все равно не получается, поскольку возникает кубическое уравнение $4u^3 =$

*) См. статью И. Клуновой и Д. Фукса «Формула существует, но...» («Квант», 1976, № 9).

$=au + \frac{b}{2}$, фактически совпадающее (подстановка $x=2u$) с исходным уравнением (4).

Позднее Лейбниц (1646—1716), который изучал кубические уравнения по книге Бомбелли, окончательно осознал, что в неприводимом случае невозможно выразить корни уравнения через радикалы оставаясь в действительной области.

На рубеже XVI—XVII веков судьба новых чисел еще не решилась. Франсуа Виет (1540—1603), которого часто называли «отцом алгебры» за то, что он начал пользоваться алгебраической символикой (буквенными обозначениями для коэффициентов уравнения, а не только для неизвестных), старался обходиться не только без комплексных корней, но и без отрицательных. Поскольку он занимался, в частности, соотношениями между корнями и коэффициентами (теорема Виета), это было ему не просто, но он находил выход из положения. Скажем, если уравнение (5) имеет два положительных корня x_1, x_2 и один отрицательный корень x_3 , то Виет, вместо равенств $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -a$, $x_1x_2x_3 = -b$ (сейчас эти равенства называются *формулами Виета*), показывал, что $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = a$, $x_1x_2(x_1 + x_2) = b$ (докажите!), не привлекая, в отличие от Кардано, ни третьего отрицательного корня, ни положительного корня вспомогательного уравнения (4). Есть мнение (Н. Бурбаки), что относительный консерватизм Виета связан с тем, что он был страстным почитателем древних.

Мы должны вспомнить Виета еще в связи с его интерпретацией неприводимого кубического уравнения. Виет был великим мастером получать алгебраические соотношения тригонометрическими средствами. Занимаясь тригонометрическими функциями кратных углов, Виет решил воспользоваться формулой

$$\cos 3\varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \quad (6)$$

для решения кубических уравнений. Он сопоставил (6) с уравнением (4). Чтобы это сопоставление было более прозрачным, сделаем в (4) замену

$a = 3r^2$, $b = ar^2$. В этих обозначениях неприводимому случаю отвечает $r > \frac{a}{2}$, что делает естественным за-

мену $\alpha = 2r \cdot \cos v$ ($0 < v < \frac{\pi}{2}$). Если еще сделать замену неизвестного $x = 2ry$, то (4) превратится в уравнение

$$4y^3 - 3y = \cos v, \quad (7)$$

которому, в силу (6), удовлетворяет $y = \cos \frac{v}{3}$, то есть для (4) получаем выражение для положительного корня $x_1 = 2r \cdot \cos \frac{v}{3}$. Ясно, что два отрицательных корня равны $x_{2,3} = -2r \cdot \cos \left(\pm \frac{2\pi}{3} + \frac{v}{3} \right)$ и что для уравнения (5) корректны аналогичные выкладки, только $\frac{\pi}{2} < v < \pi$ и x_1 — отрицательный корень, а x_2, x_3 — положительные (сопоставьте эти представления для корней со способом Кардано переходить от корней уравнения (4) к корням уравнения (5)).

Откажемся на время от имитации старины и перепишем формулу Виета в обозначениях (1), (2).

Если $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ (неприводимый случай), то, в частности, $p < 0$. Полагая $r = \sqrt{-\frac{p}{3}}$, $\alpha = \frac{3q}{p}$ (тогда $2r > \alpha$), $v = \arccos \frac{\alpha}{2r}$, окончательно получаем

$$x = 2 \sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left(\frac{2\pi k}{3} + \frac{\arccos \frac{3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{-p}}}{3} \right)$$

Все выкладки Виет производит в области действительных чисел, однако в его представлении корней участвуют не только алгебраические операции, но и тригонометрические функции. Его формула не противоречит тому, что не существует алгебраического представления корней неприводимого кубического уравнения. Формула Виета несомненно пригодна в вычислительном плане:

она позволяет вычислять корни при помощи тригонометрических таблиц.

В идейном отношении она допускает следующую интерпретацию. Среди геометрических задач древних, приводивших к кубическим уравнениям, можно выделить две задачи: задачу о построении куба заданного объема (в частности, задачу об удвоении куба), сводящуюся к извлечению кубического корня, и задачу о трисекции угла, сводящуюся к уравнению (7). Формула Кардано показывает, что в приводимом случае решение кубического уравнения (при помощи арифметических операций и извлечения квадратного корня) сводится к задаче о построении куба (кстати, Кардано выводил свою формулу на геометрическом языке!). Результат Виета показывает, что в неприводимом случае в аналогичном смысле все сводится к уравнению трисекции угла. Итак, две классические геометрические задачи отражают две возможные не сводящиеся друг к другу (в области действительных чисел) ситуации в кубических уравнениях.

В XVII веке к отрицательным числам пришло окончательное признание. Единообразная трактовка трех возможных типов квадратных уравнений (в положительной области!) восходит еще к Михаилу Штифелю (1487—1567), к его «Общей арифметике», вышедшей в Нюрнберге в 1544 г. (за год до «Великого искусства» Кардано).

В 1585 г. в «Арифметике» Симона Стевина (1548—1620), замечательного механика и математика, общие квадратные уравнения рассматриваются уже достаточно последовательно. Стевин решительно пользуется разными типами чисел: рациональными, иррациональными, отрицательными. Он возрождает геометрический взгляд греческих математиков на числа (это сделал уже Бомбелли в оставшейся неизвестной современникам IV книге «Алгебры»), начинает работать с (конечными) десятичными дробями, приближая ими любые действительные числа. Принципиально, что Стевин настаивает на полном равноправии новых чисел со старыми, на их реальности: «Мы приходим к выводу, что не существует никаких абсурдных, иррациональных, неправильных, необъяснимых или глухих чисел, но что среди чисел существует такое совершенство и согласие, что нам надо размышлять дни и ночи над их удивительной законченностью».

Все же окончательное признание отрицательных чисел связано с их интерпретацией при помощи числовой оси в аналитической геометрии и направленного движения в механике. Но и это признание далось нелегко. Тому есть интересное свидетельство. В середине XVIII века Д'Аламбер (1717—1783) пишет в статье «Отрицательное» в «Энциклопедии»: «Правила алгебраических действий с отрицательными количествами в общем приняты всеми и считаются точными независимо от того, что подразумевается под этими количествами». Итак, нет сомнений в корректности их использования, но еще не ясен окончательно вопрос об их реальности.

Теперь о комплексных числах. Даже такой смелый человек, как Стевин, считал, что заниматься ими — дело бесполезное, отвлекающее от занятий «законными» вопросами. И все же, хоть и медленно, дело двигалось вперед. Начинают говорить об «идеальных», реально не существующих корнях уравнений высокой степени, которые удобно рассматривать, чтобы сохранить соотношения между корнями и коэффициентами в общем случае. Причем пока совсем не ясно, что «идеальные» корни сводятся к комплексным: почему хватит этих чисел, придуманных для обслуживания квадратных уравнений?

Альбер Жирар (1590—1633) в изданной в 1629 г. книге «Новое открытие в алгебре» утверждал, что уравнение n -й степени имеет n корней, считая «идеальные» (это утверждение мельком упоминалось у Петера Роте еще в 1608 г.*). «Можно было бы спросить: кому нужны такие решения, которые невозможны? — писал Жирар. — Я отвечаю: они нужны для трех вещей — для справедливости общего правила, и чтобы убедиться, что нет других решений, и ради своей полезности.» Справедливость требует не

*) Позднее было выяснено, что оно легко следует из так называемой «основной теоремы алгебры», утверждающей, что каждый многочлен с комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один комплексный корень (см., например, «Квант», 1982, № 4).

согласиться с Жираром: в то время «полезность» комплексных чисел еще никак не проявилась.

Теорема о корнях уравнения n -й степени появляется и на «алгебраических» страницах знаменитой «Геометрии» Рене Декарта (1596—1650), вышедшей в 1637 г. в Лейдене (там же, где книга Жирара). В этой книге заложены основы аналитической геометрии, но очень поучителен также текст, относящийся к общим алгебраическим уравнениям. Декарт не пользуется буквенными обозначениями для коэффициентов (как это делал Виет) и вынужден пояснять утверждения на примерах; Декарт вводит обозначение x для неизвестного и от него идут современные обозначения для степеней x^3 , x^4 (впрочем, вместо x^2 все еще пишется xx). «Итак, знайте, — пишет Декарт, — что в каждом уравнении может иметься столько различных корней, то есть значений неизвестной величины, сколько последняя имеет измерений». Показатель степени здесь называется «измерением», потому что по-прежнему на первый план выдвигается геометрическая интерпретация степени (квадрат, куб). Далее: «Но иногда случается, что некоторые из этих корней ложны, или меньше, чем ничего». Как и следовало ожидать от создателя аналитической геометрии, Декарт уверенно обращается с отрицательными числами. Он четко формулирует утверждение, называемое теперь *теоремой Безу* (который жил заметно позже — в XVIII веке), как для положительных, так и для отрицательных корней, что позволяет понижать степень уравнения, если известен корень. После этого Декарт пишет: «Впрочем, как истинные, так и ложные корни не всегда действительны, но иногда они только мнимые (“*imaginaires*”; отсюда и пошел термин «мнимые» — С. Г.), то есть всегда можно вообразить себе столько корней, сколько я сказал, но иногда не существует никакой величины, которая соответствовала бы корням, которые воображают себе. Так, например, в уравнении $x^3 - 6xx + 13x - 10 = 0$ (Декарт пользовался знаком ∞ вместо уже

существовавшего =) можно вообразить себе три корня, но среди них только один действительный, именно 2; что же касается двух других, то их можно увеличивать, уменьшать или умножать так, как я только что объяснил, но при всем том они останутся только мнимыми».

Обратим внимание на два обстоятельства: Декарт не пытается делить левую часть уравнения на $x - a$ для комплексного корня a и, соответственно, не готов рассматривать уравнения с комплексными коэффициентами (комплексные числа играют служебную роль). Декарта можно понять так, что комплексные числа бывают положительными и отрицательными, то есть он не понимает еще, что комплексные числа нельзя естественно упорядочить! Это заблуждение великого ученого показывает, сколь смутными были еще представления о комплексных числах. Мы привели длинные извлечения из Декарта, чтобы продемонстрировать в наиболее совершенном варианте представления об алгебраических уравнениях и комплексных числах, которые сложились к середине XVII века.

А затем почти полтора века силы лучших математиков были сконцентрированы на создании математического анализа. Алгеброй, которая тогда фактически сводилась к теории алгебраических уравнений, занимались мало, и алгебраические результаты по сравнению с аналитическими достижениями выглядели скромными. Можно сказать, что выдающиеся математики в основном обращались к алгебре в связи с нуждами анализа и аналитической геометрии. Скажем, разложение многочленов на множители понадобилось для интегрирования рациональных дробей. А к комплексным числам начали понемногу привыкать. В связи с нуждами анализа рассматривали даже логарифмы комплексных чисел.

В 1746 г. Д'Аламбер публикует доказательство основной теоремы алгебры с некоторыми пробелами, но с «истинным стержнем» (Гаусс). С работ Лагранжа (1736—1813) началась новая эпоха в теории алгебраических уравнений. Показа-

тельно, что и Лагранж, и Эйлер (1707—1783) уделяют заметное внимание исследованию формулы Кардано в комплексной области. Эйлер рассматривает элементарные функции комплексного переменного и обнаруживает поразительную связь показательной и тригонометрических функций. Это был принципиальный шаг, поскольку прежде комплексные числа связывались лишь с алгебраическими уравнениями.

Еще в начале XVIII века был обнаружен важный пример, когда комплексные корни не просто могут быть введены для полноты картины, но связаны с конкретной действительной задачей. Котес и Муавр обнаружили связь уравнения $x^n - 1 = 0$ с классической задачей о делении круга на n равных частей. Эта связь очевидна, если знать геометрическую интерпретацию комплексных чисел (n комплексных корней из 1 являются вершинами правильного n -угольника).

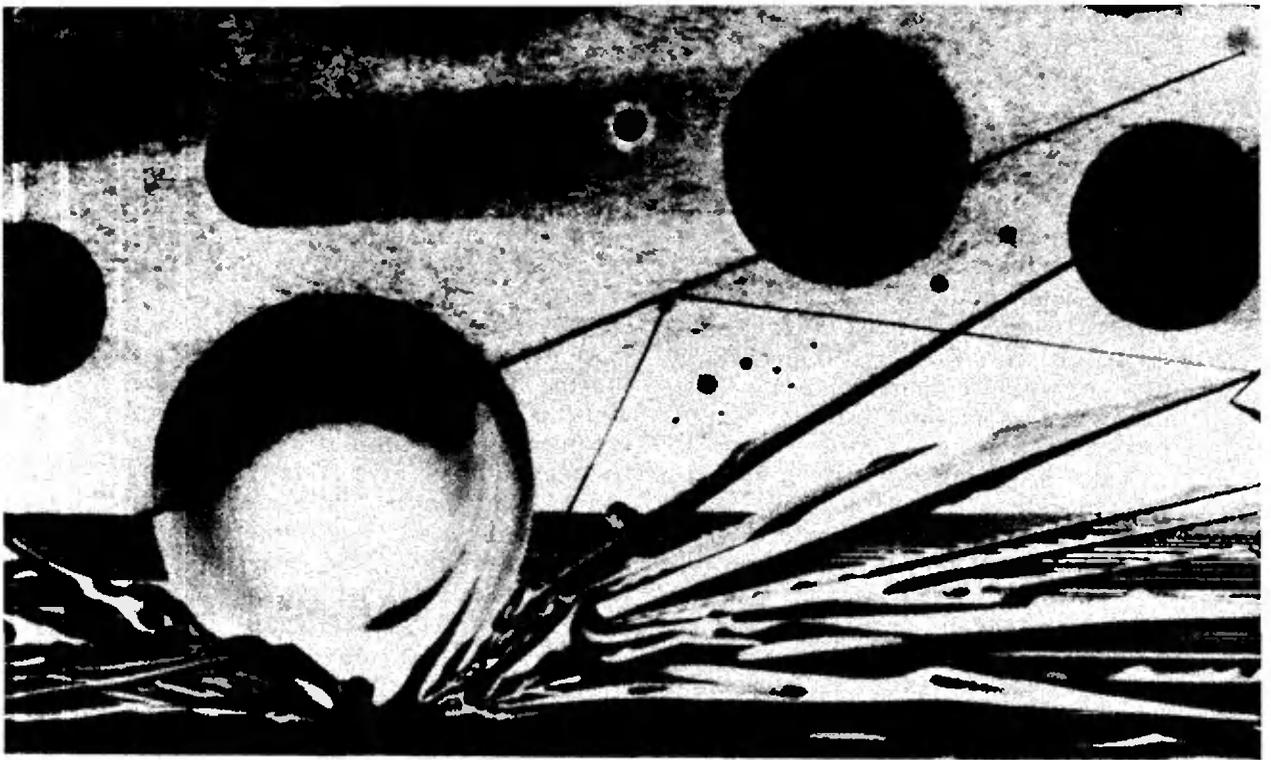
Гаусс (1777—1855), возможно, уже знал эту интерпретацию, когда в 1796 г. использовал связь с уравнением $x^{17} - 1 = 0$ для построения правильного 17-угольника. Однако в своей публикации, как, впрочем, и в диссертации 1798 г., посвященной первому строгому доказательству основной теоремы алгебры (у нее есть чисто действительная формулировка: любой многочлен с действительными коэффициентами раскладывается в произведение таких же многочленов не выше второй степени), он предпочитает комплексными числами не пользоваться. В 1811 г. в письме к Бесселю Гаусс пишет: «Подобно тому, как всю область действительных величин можно представить с помощью бесконечной прямой, можно себе представить область всех величин, действительных и мнимых, с помощью бесконечной плоскости, где каждая точка, определенная своей абсциссой a и своей ординатой b , представляет в то же время величину $a + ib$.» Этот результат Гаусс опубликовал только в 1831 г. Аналогичные результаты менее известных современников Гаусса остались почти незамеченными: Ж. Аргон (1806 г.), К. Вессель (1798 г., работа

оставалась неизвестной сто лет). В сознании математиков геометрическая интерпретация комплексных чисел превращала воображаемый объект в реальный (кстати, термин «комплексное число» предложил Гаусс).

Историю математики в XIX веке уже нельзя отделить от комплексных чисел. Гаусс, Коши, Якоби, Абель, Риман показывают, что переход к анализу функций комплексной переменной позволяет обнаружить глубочайшие факты, которые нельзя увидеть в действительной области.

В геометрии «воображаемые» элементы появились на сто лет позже, чем в алгебре. Жерар Дезарг (1593—1662) обнаружил, что если ввести «воображаемые» бесконечно удаленные точки, в которых «пересекаются» параллельные прямые, то параллельность в самом деле превращается в частный случай пересечения. Здесь картина во многом напоминает ситуацию с комплексными числами, которые позволили избежать рассмотрения исключительных случаев. Виктор Понселе (1788—1867) почти через двести лет (было это в Саратове, в плену после войны 1812 г.) показал, что все окружности «проходят» через две комплексные бесконечно удаленные точки. Это был момент, когда комплексные числа появились в геометрии. Многие считали, что они противоречат подлинной геометрической интуиции (известный геометр Якоб Штейнер (1796—1863) называл их «призраками», «царством теней»). И все же выбора не было — слишком многие (действительные) геометрические факты стали понятны с комплексной точки зрения.

Три века понадобилось комплексным числам, чтобы занять бесспорное положение в математике. Быть может, это и не так много в сравнении с десятью веками, которые понадобились отрицательным числам. Впрочем, в школьной математике положение комплексных чисел (в отличие от отрицательных) остается непрочным по сей день.



Минимальные поверхности

*Доктор физико-математических наук
А. Т. ФОМЕНКО*

Когда бельгийский физик Жозеф Плато в XIX веке начал опыты по изучению конфигурации мыльных пленок, он вряд ли предполагал, что они послужат толчком к возникновению целого научного направления, бурно развивающегося вплоть до настоящего времени и известного сегодня под названием «проблема Плато». Опыты, которые когда-то проводил Плато, хорошо знакомы нам с детства — вряд ли кто-нибудь не развлекался в свое время выдуванием мыльных пузырей или конструированием мыльных пленок, затягивающих проволочный контур.

Если вы хотите в домашних условиях получить красивые мыльные пленки (например те, которые обсуждаются в этой статье), вот несколько практических советов. Вам нужны: гибкая тонкая проволока, туалетное мыло, стакан или миска воды и глицерин (можно и без него, но с ним пленки

устойчивее). Из четверти куска мыла сделайте мелкую стружку, растворите в теплой воде и добавьте ложку глицерина (если он есть). Из проволоки сделайте замкнутый контур с ручкой, опустите в раствор и осторожно выньте его; замысловато изгибая контур, можно разнообразить форму пленок.

Когда мы вынимаем проволочный контур из мыльной воды, на нем висит красивая радужная мыльная пленка, ограниченная этим контуром. Размеры пленки могут быть довольно значительны, но, конечно, чем больше пленка, тем легче она лопается под воздействием силы тяжести. Если, напротив, размеры контура невелики, то во многих вопросах, связанных с изучением мыльных пленок, можно-пренебрегать силой тяжести. Этим обстоятельством мы и будем пользоваться в дальнейшем.

Как образуется мыльная пленка?

Рассмотрим изменение свойств поверхностной пленки жидкости при добавлении в нее мыла. На рисунке 1,а условно изображена граница раздела двух сред: воды и воздуха. Стрелками обозначены силы взаимного притяжения, действующие между полярными молекулами воды, характеризующимися асимметричным распределением электрического заряда. Отчетливо видно, что именно эти силы вызывают появление по-

Заставка к статье нарисована ее автором.

верхностного натяжения на границе двух сред. В отличие от молекул воды, молекулы мыла образованы длинными тонкими неполярными углеводородными цепями с полярной кислородной группой на одном из концов цепи. Когда молекулы мыла добавлены в воду, они устремляются к поверхности и заполняют ее равномерным слоем, причем каждая из них ориентирована своим неполярным концом наружу (рис. 1.б). Оттесняя молекулы воды внутрь, молекулы мыла уменьшают, тем самым, поверхностное натяжение. Оказываясь, это обстоятельство придает поверхностной пленке дополнительную эластичность, проявляющуюся в тот момент, когда мы опускаем, а затем извлекаем из воды тонкий проволочный контур.

В самом деле, когда проволока достигает поверхности (см. рисунок 1.б, где показано сечение проволоки), поверхность вспучивается, обволакивая контур. Это происходит вследствие того, что около проволоки число молекул мыла временно уменьшается (см. рис. 1.б), то есть падает их число на единицу площади пленки, а следовательно, увеличивается поверхностное натяже-

ние, определяемое прорывающимися снизу молекулами воды. Это придает пленке в непосредственной близости от проволоки дополнительную гибкость, приводящую к появлению мыльной пленки на контуре после его извлечения из воды. Ясно также, что толщина мыльной пленки, затаивающей контур, ограничена снизу суммой длин двух молекул мыла (рис. 1.в). Процесс образования мыльной пленки показан на рисунке 1, г. По мере подъема контура гибкая поверхностная пленка обволакивает его и тянется вслед за ним. Сила тяжести ограничивает размер поверхности и при значительном удалении контура от жидкости пленка лопается.

Минимальная поверхность — модель мыльной пленки

Физический принцип, лежащий в основе формирования мыльных пленок и регулирующий их поведение и свойства, чрезвычайно прост: физическая система сохраняет определенную конфигурацию только в том случае, когда она не может легко изменить ее, заняв положение с меньшим значением энергии. Энергия по-

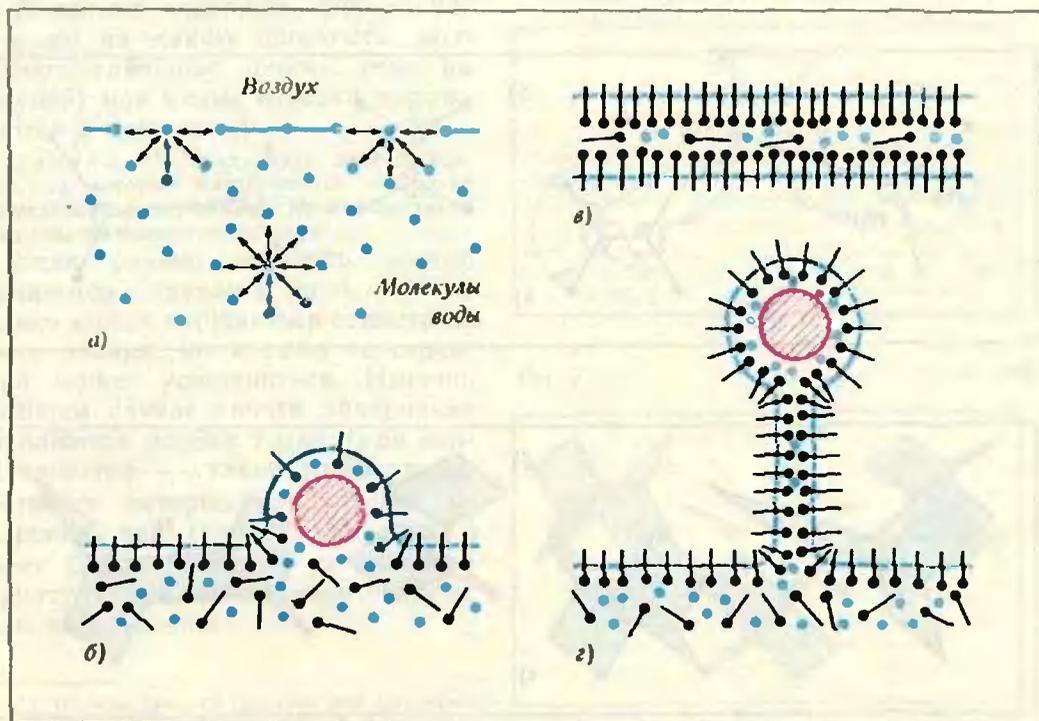


Рис. 1

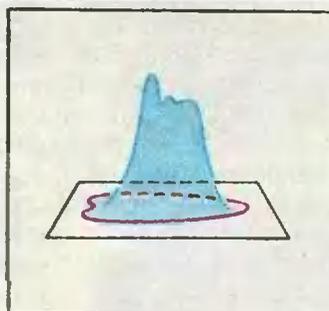


Рис. 2.

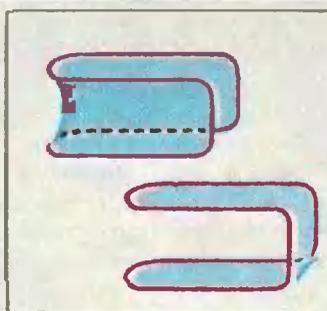


Рис. 3.

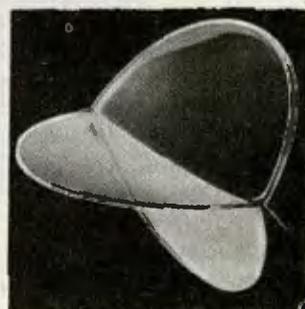


Рис. 4.

верхности (мыльной пленки), часто описываемая в терминах поверхностного натяжения жидкости, обусловлена наличием сил притяжения между отдельными молекулами и несбалансированностью этих сил на границе поверхности. Наличие несбалансированных сил влечет за собой следующий интересный эффект: жидкая пленка превращается в эластичную поверхность, стремящуюся минимизировать свою площадь и, следовательно, минимизировать энергию натяжения, приходящуюся на единицу площади. При этом мы пренебрегаем силой тяжести и давлением воздуха.

Таким образом, математической моделью мыльной пленки служит гладкая поверхность минимальной

площади, стягивающая данный контур: математики ее называют *минимальной поверхностью*. Классическая математическая теория этих поверхностей относится к так называемому вариационному исчислению — области анализа, возникшей в XVIII веке. В наши дни для развития этой теории привлекаются и более современные средства топологии и дифференциальной геометрии. Разумеется, пользуясь лишь «школьной» математикой, саму теорию не изложить; но ее результаты легко пояснить наглядно и можно даже проверить на опыте. Впрочем, здесь попутно возникают красивые геометрические задачи, которые решаются средствами элементарной математики.

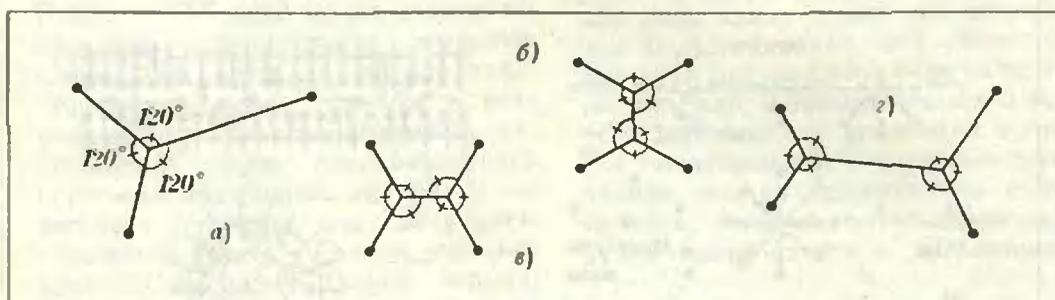


Рис. 5.

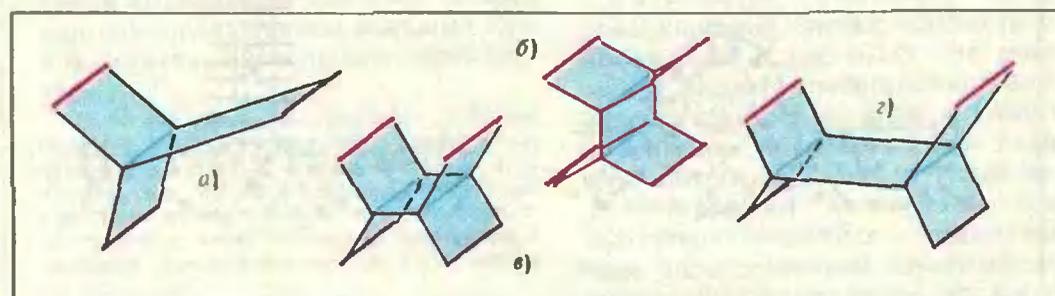


Рис. 6.

Простейшие контуры

Рассмотрим сначала случай, когда контур не слишком сильно изогнут — именно, когда его можно взаимно-однозначно*) спроектировать на выпуклый контур, лежащий в некоторой плоскости. Тогда из математической теории следует, что существует одна и только одна минимальная поверхность, стягивающая данный контур. Когда этот контур плоский, «теорема существования и единственности» представляется очевидной: контур можно натянуть куском плоскости, который он ограничивает, а любая другая стягивающая его поверхность будет большей площади (рис. 2).

Разные пленки на одном контуре

Если не ограничиваться простейшими контурами, описанными в предыдущем разделе, то теорема единственности перестает быть верной: на один и тот же контур иногда можно натянуть две совсем разные минимальные поверхности. Несложный пример показан на рисунке 3; этот пример легко воспроизводится с мыльными пленками. Обратите внимание на то, что контур на рисунке 6 нельзя «хорошо» спроектировать ни на какую плоскость: возникают «двойные точки» (как на рисунке) или целые отрезки вырождаются в одну точку.

Задача 1. Придумайте другие контуры, на которые натягиваются несколько минимальных поверхностей. Может ли таких поверхностей быть больше двух?

Если сильно запутать контур (например, заузить его), то не только может нарушиться единственность пленки, но и сама ее структура может усложниться. Именно, в общем случае «почти наверняка» появляются *особые точки* (или *сингулярности*) — такие точки, в окрестности которых пленка уже не устроена, как (изогнутый) диск, а имеет более сложную, ветвящуюся структуру. Это проще всего увидеть, если использовать

*) То есть так, что никакие две различные точки контура не попадут на одну и ту же точку плоскости.

Контур с ветвлением

Простейший такой контур показан на рисунке 4. Стягивающая его минимальная поверхность имеет целый отрезок особых точек, от которого поверхность разветвляется в три плоских листа, образующие между собой углы в 120° . Причины этого эффекта вам станут понятнее, если вы решите следующую задачу.

Задача 2. а) Соедините три точки отрезками так, чтобы сумма их длин была минимальной. Сделайте то же б) для вершин квадрата, в) для вершин произвольного четырехугольника.

Ответы на эту задачу показаны на рисунке 5, а куски аналогичных минимальных поверхностей — на рисунке 6. Обратите внимание на то, что в ответах все углы равны 120° , и на вновь возникшую неоднозначность поверхности (рис. 6, б и в).

Интересно, что попытки построить минимальную пленку, у которой на каком-либо сингуляриом отрезке сошлось бы число листов, большее, чем три, терпят неудачу. Это объясняется простым геометрическим обстоятельством. Допустим, что на каком-то отрезке сошлись четыре листа пленки. Рассмотрим сечение поверхности, ортогональное этому

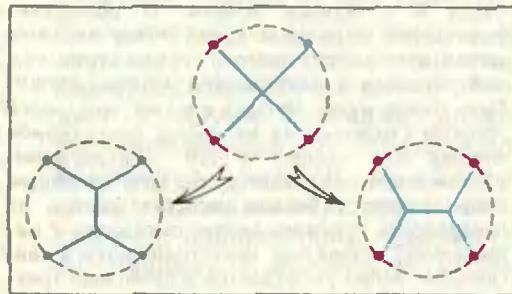


Рис. 7.

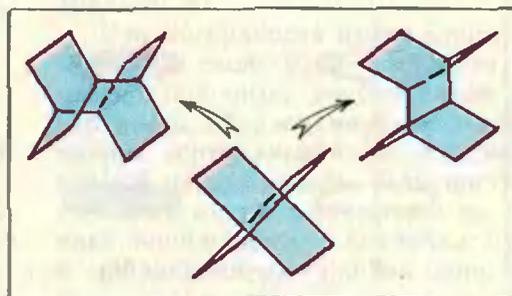


Рис. 8.

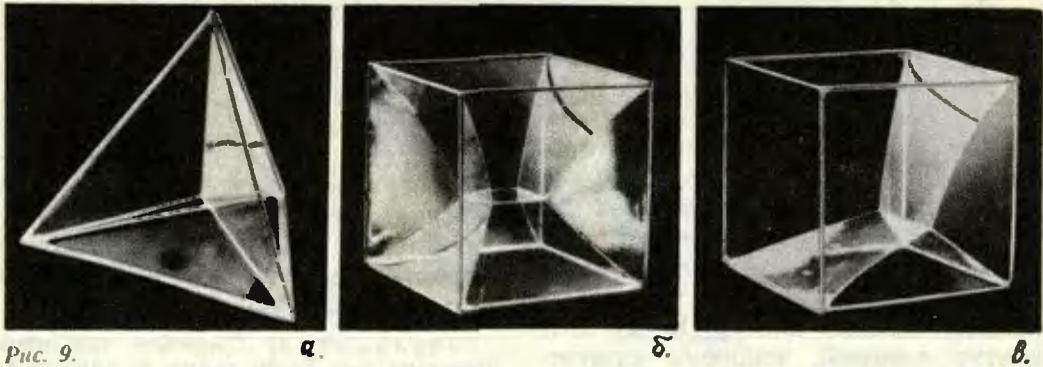


Рис. 9.

сигнулярному отрезку (рис. 7). Тогда четырехкратная особая точка (то есть такая, в которой сошлись 4 листа) распадается в объединение двух трехкратных точек, поскольку длина ломаной, состоящей из двух диагоналей, больше, чем длина каждой из двух других ломаных, показанных на рисунке 7 (в чем вы убедились, если решили задачу 2). На рисунке 8 этот процесс распадаения показан в непосредственной близости от сечения пленки.

Ясно, что изображенная перестройка пленки уменьшает ее полную площадь по сравнению с площадью исходной пленки. Минимальная поверхность находится в устойчивом равновесии, в частности, малые возмущения пленки лишь увеличивают ее площадь, поэтому равнодействующая всех сил, действующая на каждую точку пленки, должна быть равна нулю. Это относится и к особым точкам. В положении равновесия в каждой такой точке сходятся ровно три листа, поэтому сумма трех сил, действующая в направлении листов, должна быть равна нулю. Отсюда следует, что листы должны сходить на их общем сигнулярном отрезке под углами в 120° . Аналогичные рассуждения показывают, что если на общем ребре сходятся больше четырех листов, то поверхность, стремясь занять положение с минимальной площадью, перестраивается и сигнулярное ребро распадается в несколько трехкратных ребер.

Задача 3. Нарисуйте ломаную минимальной длины, соединяющую пять вершин правильного пятиугольника. Сколько различных таких ломаных существует?

Другие красивые ветвящиеся пленки получаются, если пленкой стянуть каркас тетраэдра или куба (рис. 9). Обратите внимание на особые точки, в которых сходятся несколько сигнулярных ребер.

Задача 4. а) Найдите все углы между плоскостями минимальной поверхности, стягивающей ребра правильного тетраэдра (рис. 9, а). б) При каком значении x стороны центрального квадрата стягивающая поверхность куба будет минимальной (рис. 9, б)?

Задача 5*. Могут ли в особой точке минимальной поверхности сойтись не 4 особые линии, а три? А пять?

Незамкнутые контуры

Важной характеристикой поверхности является ее взаимодействие с граничным контуром. Различные типы такого взаимодействия изучаются методами топологии. Из физических свойств минимальных поверхностей следует, что в них не должно быть «дырок», проколов, не взаимодействующих с границей пленки. В противном случае такая «дырка» под действием сил поверхностного

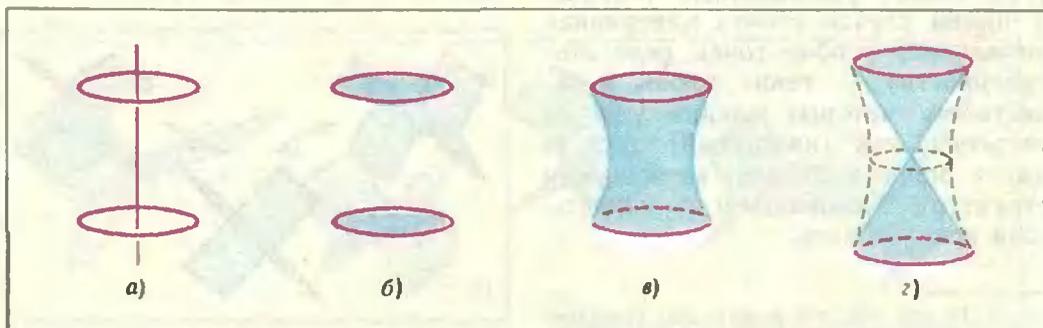


Рис. 10.

натяжения будет расширяться до тех пор, пока вся пленка (или ее часть) не стянется (схлопнется) на граничный контур. Это свойство легко проверить в реальном опыте, быстро проколов мыльную пленку достаточно толстой проволокой или стержнем. Указанное свойство мыльных пленок кладется в основу математического определения границы пленки и свойства пленки затягивать, заклеивать граничный контур.

Конечно, эта математическая идеализация — упрощение реальности, поскольку существуют (и устойчивы) физические минимальные поверхности, повисающие на проволочном контуре, однако оставляющие некоторые участки этого контура свободными. Другими словами, физическая пленка может быть устойчивой, и в то же время крепиться не ко всему контуру, а лишь к его части или же повисать на незамкнутом контуре. Это объясняется тем, что реальная проволока имеет конечную толщину, что стабилизирует (в некоторых случаях) математически невозможную ситуацию (рис. 11, а). Для этого проволока должна быть достаточно толстой по сравнению с размерами минимальной поверхности.

Другой пример показан на рисунке 11, б — здесь контур не является замкнутой кривой, поскольку имеет два конца и может быть распрямлен в отрезок. С математической точки зрения не существует минимальной поверхности, затягивающей отрезок, вложенный без самопересечений в трехмерное пространство. Это объясняется тем, что отрезок не создает «цикла», то есть не образует никакой «дырки», а именно дырки вызывают появление мыльных пленок, затягивающих их (при извлечении контура из воды).

Несколько контуров

Рассмотрим теперь свойства минимальных пленок, граница которых состоит из нескольких окружностей, например из двух. В качестве простейшего примера возьмем две окружности, расположенные в двух параллельных плоскостях, ортого-

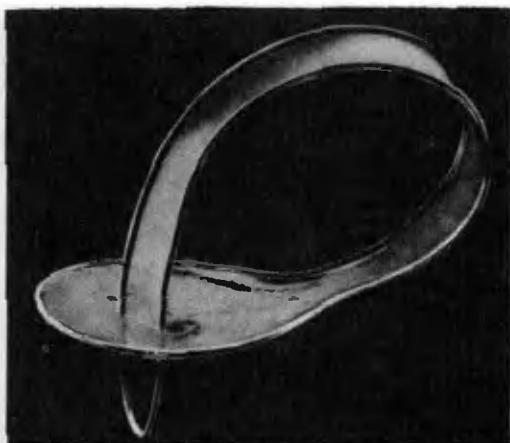


Рис. 11,а.

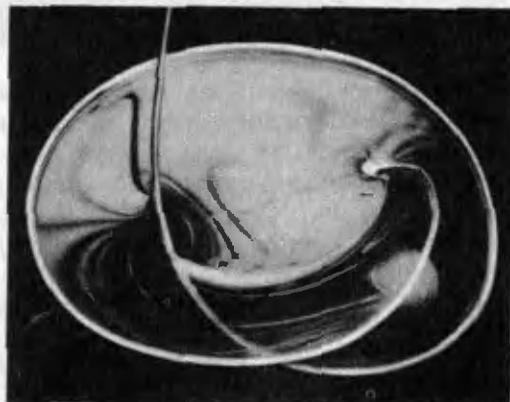


Рис. 11,б.

нальных вертикальной оси, и имеющие свои центры на оси (рис. 10, а). Если окружности значительно удалены друг от друга, то минимальная пленка, затягивающая их, совпадает с двумя плоскими дисками, расположенными в параллельных плоскостях (рис. 10, б). Если мы начнем сближать окружности (оставляя их в параллельных плоскостях), то, начиная с некоторого момента, появится еще одна минимальная поверхность, заклеивающая эти окружности и называемая *катеноидом* (рис. 10, в).

Эта поверхность имеет много интересных свойств, в частности, ее можно получить, рассматривая поверхность, образованную вращением вокруг вертикальной оси так называемой цепной линии. Для построения этой линии рассмотрим на вертикальной плоскости две точки; пусть в них закреплена тяжелая цепь, свободно провисающая под действием силы тяжести, направленной вниз.

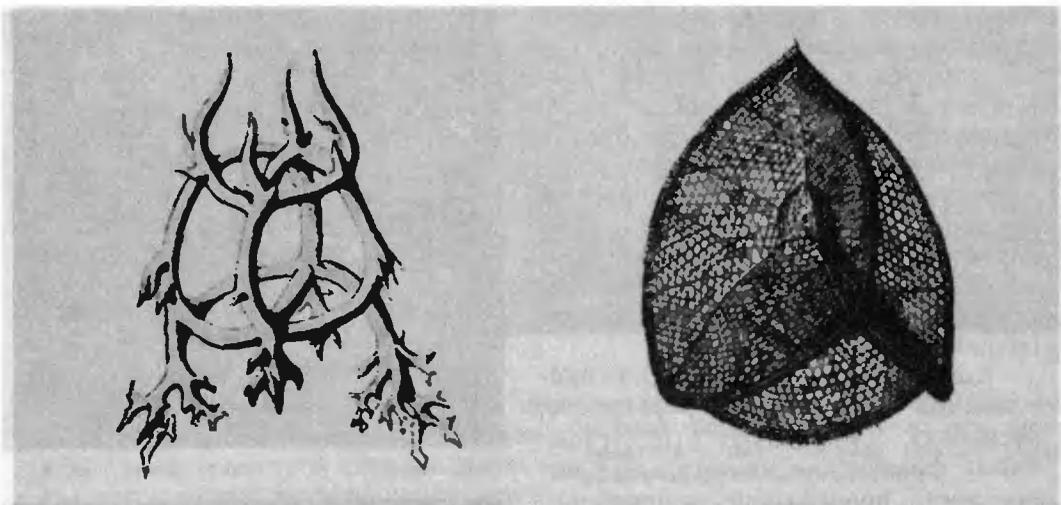


Рис. 12.

Провисшая цепь образует некоторую траекторию, соединяющую две точки подвеса и называемую *цепной линией*. Вращая ее вокруг горизонтальной оси, мы и получим катеноид. Чтобы совместить его с поверхностью, описанной выше, нужно просто развернуть его, направив растробом вверх.

Отметим, что конус с вершиной в начале координат не будет минимальной поверхностью. На рисунке 10, г показано, как деформируется конус, стремясь занять положение с наименьшей площадью (при фиксированной границе). Конфигурация, соответствующая этому положению, и есть катеноид. Это обстоятельство связано с эффектами, с которыми мы уже познакомились при изучении распада четырехкратных точек в сумму трехкратных точек. В самом деле, рисунок 7 можно рассматривать как процесс превращения «одномерного конуса», образованного двумя пересекающимися отрезками (диаметрами пунктирной окружности), в более сложную кривую с двумя трехкратными особенностями. В принципе, аналогичное явление происходит и в случае обычного двумерного конуса, но только здесь его вершина (особая точка) раздувается в целую окружность — горловину катеноида. В обоих случаях процесс деформации пленки (одномерной кривой) уменьшает ее первоначальную площадь (или длину в одномерном случае) и заставляет поверхность (кривую)

занять оптимальное положение, характеризующееся наименьшей площадью (длиной).

Минимальные поверхности в живой природе

Оказывается, минимальные пленки широко распространены в природе как наиболее экономные поверхности, формирующие скелеты некоторых живых организмов. Наиболее эффектный пример — скелеты радиолярной, микроскопических морских животных, имеющих самые разнообразные и экзотические формы. По-видимому, первым, кто обратил внимание на то, что поверхностное натяжение играет существенную роль в создании формы этих существ, был английский ученый D'Arcy Wentworth Thompson, автор книги «Рост и форма». Радиолярии состоят из небольших комочков протоплазмы, заключенных в пенообразные формы, наподобие мыльных пузырей и пленок. Поскольку эти организмы достаточно сложны, то минимальные поверхности, входящие в них, имеют, вообще говоря, много точек ветвления и ребер ветвления, на которых и концентрируется основная масса жидкости, входящей в состав организма. Эта концентрация жидкости вдоль ребер ветвления и около особых точек хорошо видна на реальных мыльных пленках: жидкость стекает с мыльной пленки свободно до тех пор, пока не

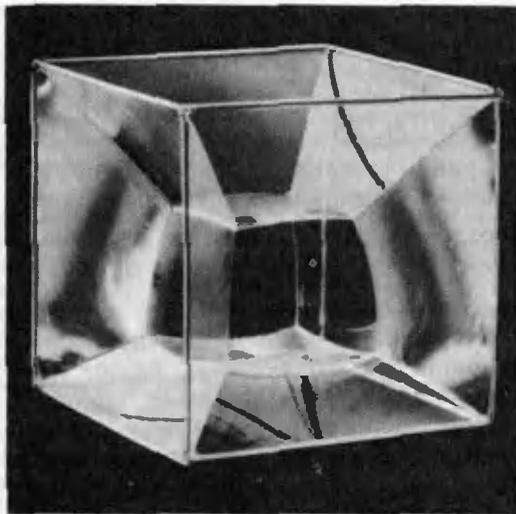
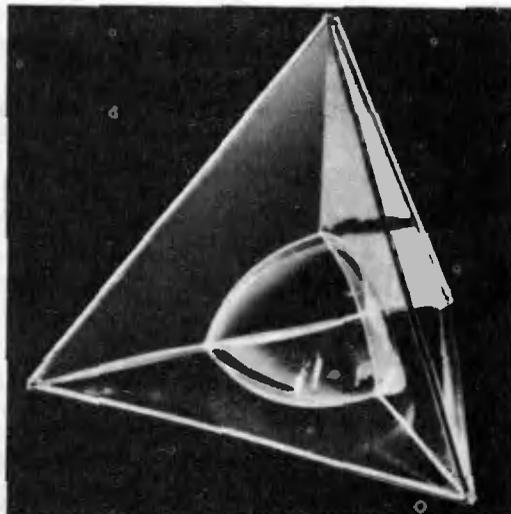


Рис. 13.

встречает ребро, на котором сходятся три листа пленки. Здесь жидкость тормозится и оседает, образуя водяные отрезки, зрительно выявляющие особые ребра минимальной поверхности. Этот же процесс фактически происходит и у радиолярий. Концентрация жидкости вдоль ребер ветвления приводит к тому, что твердые фракции морской воды и соли оседают вдоль этих ребер и постепенно образуют твердый скелет животного. Наглядно геометрию этого скелета можно представить, если в массе мыльной пены обратить внимание на ребра ветвления, то есть на отрезки, по которым стыкуются разные пузыри. Эти отрезки соединяются друг с другом (иногда сложным образом) и образуют «жидкостный костяк» пены. После гибели животного мягкие ткани постепенно исчезают и остается твердый скелет, образовавшийся описанным образом.

Итак, он представляет собой не что иное, как наглядное застывшее изображение системы ребер ветвления и особых точек, возникающих в сложной минимальной поверхности, включающей в себя и замкнутые объемы, ограниченные подобием мыльных пузырей. Кроме того, в формировании твердого скелета радиолярии определенную роль играют и стенки клеток, также аккумулирующие в себе соли морской воды. На рисунке 12 показаны два скелета радиолярий.



На рисунке 13 изображены две минимальные поверхности с мыльными пузырями, натянутые на контуры, образованные системой ребер обычного тетраэдра и куба. Сходство форм на рисунках 12*) и 13 поразительно. Отчетливо видно, что скелеты радиолярий довольно точно воспроизводят картину ребер ветвления минимальных поверхностей.

Важна роль минимальной поверхности в химии, где поверхностные взаимодействия на границах различных сред определяют характер и скорость многих химических превращений. Примерами минимальных поверхностей могут служить всем нам хорошо известные мембраны — это и барабанная перепонка в нашем ухе; это мембраны, служащие границами живых клеток; это мембраны в живых организмах, отделяющие один орган от другого и т. п.

Эта интереснейшая тематика привлекает самых разных специалистов по биологии, химии, физики. Как мы видели, с минимальными поверхностями связан и целый ряд интересных математических проблем. Их корректная постановка и исследование позволяют лучше понять этот удивительный (хотя и простой с виду) природный феномен.

*) Рисунок взят из книги: Ernst Haeckel, "Report on the scientific Results of the Voyage of the HMS Challenger during the Years 1873—1876".

Очерк о цепных дробях

Кандидат физико-математических наук
Ю. В. НЕСТЕРЕНКО,

доктор физико-математических наук
Е. М. НИКИШИН

В первой части этой статьи мы научились раскладывать числа в цепные дроби:

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{\frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} + \dots}}$$

познакомились с основами общей теории таких разложений и увидели, какую пользу можно извлечь из этого для практики. Приложения теории, однако, не исчерпываются календарем и зубчатыми передачами, о которых уже говорилось — вскоре мы в этом убедимся.

Раскладывая в цепную дробь квадратный корень $\sqrt{2}$ (пример 1), мы получили периодическую цепную дробь. С другой стороны, мы обнаружили (пример 2), что периодическая цепная дробь $[2; \overline{1, 1, 1, 4}]$ «сворачивается» в число, являющееся квадратным корнем: ее значение (то есть предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \pi_k$ ее подходящих дробей π_k)

оказалось равным $\sqrt{7}$. Случайно ли это?

Квадратичные иррациональности

Иррациональные числа, являющиеся корнями квадратных уравнений с целыми коэффициентами, носят название *квадратичных ирра-*

циональностей. Все они имеют вид

$$\pm \frac{P + \sqrt{D}}{Q},$$

где P, Q, D — целые числа и D не равно квадрату целого числа. Таковы, например, названные выше числа $\sqrt{2}, \sqrt{7}$, а также $1 + \sqrt{2}, (5 - \sqrt{7})/2$. В 1770 году Лагранж доказал следующую теорему.

Теорема. *Квадратичные иррациональности, и только они, имеют периодические непрерывные дроби.*

При этом период может начинаться с некоторого места разложения.

Тот факт, что значение любой периодической непрерывной дроби есть квадратичная иррациональность, доказывается так же, как и в примере 2. Доказательство обратного утверждения, то есть теоремы Лагранжа, значительно сложнее.

Мы его установим только в одном важном частном случае — для приведенных иррациональностей. Квадратичная иррациональность α называется *приведенной*, если $\alpha > 1$, а второй корень α' квадратного уравнения для α (так называемое *сопряженное* с α число) удовлетворяет неравенствам

$$-1 < \alpha' < 0.$$

Задачи

10. Если α — приведенная квадратичная иррациональность, то

$$\alpha = \frac{P + \sqrt{D}}{Q}, \quad (3)$$

где

$$0 < P < \sqrt{D}. \quad (4)$$

При этом $P^2 - D$ делится на Q .

11. Если α — приведенная квадратичная иррациональность и

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1},$$

где $a_0 = [\alpha]$, то a_1 — также приведенная квадратичная иррациональность.

Из задачи 11 следует, что если α — приведенное число, то все числа a_n в последовательности, определяемой равенствами

$$a_n = a_n + \frac{1}{a_n + 1}, \quad -a_n = [a_n],$$

также будут приведенными. При этом все они, как легко проверить, будут представляться в виде (3) с одним и тем же D . Из неравенств (4) теперь следует, что в последовательности будет только конечное число различных чисел, то есть для некоторых номеров n, m имеет

Окончание. Начало см. в «Кванте», 1983, № 5.

место равенство

$$a_n = a_m.$$

В силу этого можно утверждать, что $a_{n+1} = a_{m+1}$, $a_{n+2} = a_{m+2}$ и так далее. Последовательность $\{a_n\}$ оказалась периодической. Для случая приведенных иррациональностей теорема доказана.

Если α — произвольная квадратичная иррациональность, то в последовательности $\{a_n\}$ обязательно встретится приведенное число. Из этого факта доказательство теоремы в общем случае следует без труда. А для того чтобы доказать этот факт, нужно воспользоваться явным выражением a_n через α (задача 4*) и через числители и знаменатели подходящих дробей для α , а также тем фактом, что подходящие дроби числа α стремятся к α (задача 5*). Заинтересованный читатель сможет довести доказательство до конца, пользуясь этими указаниями.

Можно доказать, что период в цепной дроби для приведенных квадратичных иррациональностей начинается с самого начала разложения, то есть цепные дроби в этом случае будут, как говорят, *чисто периодическими*. Верно и обратное утверждение. Этот факт впервые был доказан в 1828 году французским математиком (тогда еще школьником!) Эваристом Галуа.

Периоды цепных дробей квадратичных иррациональностей

Свойства периодов, которые мы сейчас установим, не только очень красивы сами по себе, но оказываются полезными для решения некоторых уравнений.

Рассмотрим число $\alpha = \frac{\sqrt{7}+2}{3}$. Лег-

ко видеть, что оно приведенное, а после коротких вычислений получается следующее разложение в чисто периодическую цепную дробь с периодом длины 4:

$$\alpha = [1; \overline{1, 1, 4}].$$

Сопряженное с α число α' равно $\frac{-\sqrt{7}+2}{3}$. Разложим в цепную дробь

число $-\frac{1}{\alpha'} = \frac{3}{\sqrt{7}-2} = \sqrt{7}+2$. Получится

$$-\frac{1}{\alpha'} = [4; \overline{1, 1, 1}]$$

— период нашей дроби «перевернулся»! Случайно ли это?

Задача 12. Если квадратичная иррациональность α представляется чисто периодической цепной дробью

$$[a_0; \overline{a_1, \dots, a_n}],$$

то число $-\frac{1}{\alpha'}$, где α' сопряжено с α представляется чисто периодической цепной дробью

$$[a_n; \overline{a_{n-1}, \dots, a_0}]$$

с периодом, равным периоду для α , но записанным в обратном порядке.

Если D — натуральное число, не являющееся точным квадратом и $a_0 = [\sqrt{D}]$, то $\alpha = a_0 + \sqrt{D}$ будет числом приведенным ($\alpha' = a_0 - \sqrt{D}$ и $-1 < a_0 - \sqrt{D} < 0$). Следовательно,

$$\sqrt{D} + a_0 = [2a_0; \overline{a_1, \dots, a_n}]$$

и

$$\sqrt{D} = [a_0; \overline{a_1, \dots, a_n, 2a_0}]. \quad (5)$$

С помощью утверждения задачи 12 читатель легко докажет следующий факт.

Задача 13. Если D не является точным квадратом, то цепная дробь числа D имеет вид (5), где $a_0 = [\sqrt{D}]$ и часть a_1, a_2, \dots, a_n периода симметрична.

Уравнение Пелля

В V веке до нашей эры великий греческий ученый Архимед предложил свою знаменитую «задачу о быках». Ее формулировку он завершил следующими вескими словами:

«Если ты это найдешь, чужестранец,
умом пораскинув,
И сможешь точно назвать каждого
стада число,
То уходи, возгордившись победой,
и будет считаться,
Что в этой мудрости ты все до конца
превзошел.»

Мы не будем приводить здесь условие самой задачи (текст занимает больше страницы). Достаточно сказать, что для ее решения необходимо ввести 10 переменных, связанных 7 линейными уравнениями и двумя уравнениями второй степени. После преобразований и исключения переменных, задача сводится к решению в целых числах уравнения

$$x^2 - 4729494y^2 = 1. \quad (*)$$

* См. первую часть статьи в «Кванте», 1983, № 5.

А это оказалось не под силу Архимеду и его современникам...

Вообще же уравнение вида

$$x^2 - Dy^2 = 1, \quad (6)$$

где D — натуральное число, не являющееся квадратом $*$), называется уравнением Пелля; разумеется, это диофантово уравнение, то есть алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами, решение которого ищется в области целых чисел.

Как решить уравнение Пелля?

Первое, что приходит в голову, это прямой перебор: поочередно подставлять числа $x=1, 2, 3, \dots$ в формулу $y = \sqrt{(x^2-1)/D}$, пока подкоренное выражение не окажется точным квадратом. Бесперспективность такого подхода показывает следующий замечательный пример. Уравнение

$$x^2 - 991y^2 = 1$$

имеет решение в целых числах, однако среди его решений (x_0, y_0) наименьшее (!) x_0 равно

379 516 400 906 811 930 638 014 896 080.

Даже на самой мощной ЭВМ до него не добраться простым перебором!

Оказывается, непрерывные дроби дают очень удобный инструмент для решения уравнения Пелля. Опишем алгоритм (без доказательства) решения.

При каждом натуральном D , отличном от квадрата целого числа, уравнение (6) имеет бесконечное число решений в целых положительных числах x, y . Все они могут быть найдены по формуле

$$x + y\sqrt{D} = (x_0 + y_0\sqrt{D})^k, \quad k=1, 2, \dots,$$

где x_0, y_0 — решение с наименьшим значением y . Для нахождения наименьшего решения (x_0, y_0) нужно разложить в цепную дробь число \sqrt{D} . Если

$$\sqrt{D} = [a_0; \overline{a_1, \dots, a_n, 2a_0}]$$

и $\frac{p_n}{q_n}$ — подходящая дробь числа \sqrt{D}

с номером n , то

$$p_n^2 - Dq_n^2 = (-1)^{n-1}, \quad (7)$$

и если n — нечетно (длина периода четна), то

$$p_n = x_0, \quad q_n = y_0$$

будет наименьшим решением урав-

нения Пелля. Если же период нечетен (n — четно), то наименьшее решение находится по формуле

$$x_0 + y_0\sqrt{D} = (p_n + q_n\sqrt{D})^2.$$

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$x^2 - 7y^2 = 1.$$

Из разложения $\sqrt{7} = [2; \overline{1, 1, 1, 4}]$ находим

$$\frac{p_3}{q_3} = 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{8}{3}.$$

Так как длина периода четна, то наименьшее решение уравнения $x_0 = 8, y_0 = 3$, а любое решение в натуральных числах получается по формуле

$$x + y\sqrt{7} = (8 + 3\sqrt{7})^k, \quad k=1, 2, \dots$$

При $k=2$ имеем $x=127, y=48$.

Пример 4. Решим уравнение

$$x^2 - 13y^2 = 1.$$

Раскладывая $\sqrt{13}$ в цепную дробь, получаем $\sqrt{13} = [3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$ и $\frac{p_4}{q_4} = 3 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{18}{5}$.

Длина периода нечетна, поэтому наименьшее решение находим по формуле

$$x_0 + y_0\sqrt{13} = (18 + 5\sqrt{13})^2 = 649 + 180\sqrt{13},$$

то есть $x_0 = 649, y_0 = 180$. Общее решение имеет вид

$$x + y\sqrt{13} = (649 + 180\sqrt{13})^k, \quad k=1, 2, \dots$$

Задача 14. Найти наименьшее решение уравнения

$$x^2 - 61y^2 = 1.$$

Ответ: $y_0 = 226\,153\,980$.

Отметим, что имя английского математика Пелля (1610—1685) связывается с уравнением (6) по ошибке, с легкой руки Л. Эйлера. Раньше Пелля это уравнение рассматривали его соотечественники Дж. Валлис и У. Бронкер, а также француз П. Ферма. Что же касается архимедовской задачи о быках, ее решили лишь в 1880 году. Наименьшее решение y уравнения $(*)$ содержит 41 цифру, а общее число быков в задаче Архимеда имеет порядок $10^{206\,545}$! $*$)

$*$) Если $D = m^2, m \in \mathbb{N}$, то уравнение (6) не имеет целых решений — подумайте, почему.

$*$) Нет, это не факториал, а восклицательный знак.

Уравнение вида $x^2 + y^2 = p$

Можно доказать, что если p — простое нечетное число вида $4k+1$, то период непрерывной дроби для \sqrt{p} всегда нечетен. Из задачи 13 тогда следует, что разложение имеет вид

$$\sqrt{p} = [a_0; \overline{a_1, \dots, a_m, a_m, \dots, a_1, 2a_0}].$$

Обозначим через α_{m+1} число, непрерывная дробь которого имеет вид

$$\alpha_{m+1} = [a_m; \overline{a_{m-1}, \dots, a_1, 2a_0, a_1, \dots, a_m}].$$

Так как дробь чисто периодическая, то α_{m+1} — приведенное число и в силу задачи 10

$$\alpha_{m+1} = \frac{A + \sqrt{p}}{B},$$

где $A > 0, B > 0$. Из утверждения задачи 3 следует, что $-\frac{1}{\alpha'_{m+1}}$ имеет в точности такое же разложение в цепную дробь, как и α_{m+1} . А из единственности цепной дроби следует, что

$$\alpha_{m+1} = -\frac{1}{\alpha'_{m+1}}$$

или $\alpha_{m+1} \cdot \alpha'_{m+1} = -1$. Так как $\alpha'_{m+1} = \frac{A - \sqrt{p}}{B}$, то $\frac{A^2 - p}{B^2} = -1$ или $A^2 + B^2 = p$.

Указанные рассуждения дают алгоритм решения в натуральных числах уравнения

$$x^2 + y^2 = p. \tag{8}$$

Можно доказать, что это решение (с точностью до перестановки x и y) единственно и что для простых чисел p вида $4k+3$ уравнение (8) решений в целых числах не имеет.

Пример 5. Решить в целых числах уравнение

$$x^2 + y^2 = 1009.$$

Разложение числа $\sqrt{1009}$ в цепную дробь имеет вид $\sqrt{1009} = [31; \overline{1, 3, 3, 1, 62}]$. При этом

$$\alpha_1 = \frac{31 + \sqrt{1009}}{48}; \quad \alpha_2 = \frac{17 + \sqrt{1009}}{48};$$

$$\alpha_3 = \frac{28 + \sqrt{1009}}{15}.$$

Пара чисел $x=28, y=15$ есть искомое решение уравнения. Описанный здесь способ решения уравнения (8) при-

надлежит французскому математику А. Лежандру (1808 год).

Задача 15. Решить в целых числах уравнение $x^2 + y^2 = 1129$.

Уравнение вида $x^2 - Dy^2 = -1$

Если длина периода $n+1$ цепной дроби для \sqrt{D} нечетна, то из равенства (7) следует, что числа

$$x_0 = p_n, y_0 = q_n$$

будут решениями диофантова уравнения

$$x^2 - Dy^2 = -1. \tag{9}$$

Все решения этого уравнения могут быть получены с помощью формулы

$$x + y\sqrt{D} = (x_0 + y_0\sqrt{D})^{2k+1},$$

$k=0, 1, 2, \dots$

Например, все решения уравнения $x^2 - 13y^2 = -1$

задаются формулой

$$x + y\sqrt{13} = (18 + 5\sqrt{13})^{2k+1},$$

$k=0, 1, 2, \dots$

Можно доказать, что если длина периода разложения \sqrt{D} в цепную дробь четна, то уравнение (9) не имеет решений в целых числах.

Длина периода цепной дроби числа \sqrt{D}

Скорость работы алгоритмов, описанных в последних разделах, зависит, естественно, от длины периода цепной дроби \sqrt{D} . О поведении этой величины в зависимости от D в настоящее время известно очень немного. Длина периода ведет себя очень причудливо. Так, например, для $D=986\,045=5 \cdot 199 \cdot 991$ разложение

$$\sqrt{986045} = [992; \overline{1, 495, 2, 495, 1, 1984}]$$

имеет период, длина которого равна 6. В то же время длина периода разложения $\sqrt{20\,989}$ равна 205.

Известно, что для всех чисел D длина периода не превосходит

$$4\sqrt{D} \ln D.$$

С другой стороны, можно доказать, что у чисел $D=5^{2k+1}$ период не мень-

ше, чем

$$\frac{1}{3} \sqrt{D} (\ln D)^{-1},$$

и, значит, стремительно растет с ростом k . Наблюдения над большим численным материалом подтверждают гипотезу, что существует бесконечное множество чисел D , не делящихся на квадрат простого числа, у которых длина периода цепной дроби \sqrt{D} превышает $D^{\frac{1}{2}-\epsilon}$ для любого фиксированного положительного ϵ .

Использованный выше результат, что период цепной дроби \sqrt{p} для простых p вида $4k+1$ имеет нечетную длину был доказан в 1785 году Лежандром. Позже немецкий математик Дирихле установил подобную теорему для чисел $D=p \cdot q$, где p, q — простые числа с определенными условиями. Лишь недавно, в 1980 году, американский математик Лагарнас нашел алгоритм, позволяющий определять разрешимость в целых числах уравнения (9) или, что то же самое, нечетность длины периода цепной дроби для \sqrt{D} , примерно за $(\log D)^{5+\epsilon}$ операций

Цепные дроби для конкретных чисел

Мы видели выше, что квадратичные иррациональности и только они раскладываются в периодические цепные дроби. Таким образом, имеется определенная ясность в структуре цепных дробей квадратических иррациональностей. Естественно спросить, какие классы других иррациональных чисел обладают столь же хорошо обозримыми разложениями в цепные дроби. Удовлетворительного ответа на этот вопрос нет.

Например, для числа $\sqrt[3]{2}$ до сих пор неизвестно, будут ли ограничены или нет неполные частные $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ его разложения в цепную дробь

$$\sqrt[3]{2} = a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots$$

На ЭВМ были рассчитаны первые несколько тысяч чисел a_0, a_1, \dots

Вот самые первые из них:

$$\sqrt[3]{2} = [1; 3, 1, 5, 1, 1, 4, 1, 1, 8, 1, 14, 1, 10, 2, 1, 4, 12, 2, 3, 2, 1, 3, 4, 1, 1, 2, 14, 3, 12, 1, 15, 3, 1, 4, 534, 1, 1, 5, 1, 1, 121, 1, 2, 2, 4, 10, 3, 2, 2, 41, 1, 1, 1, 3, 7, 2, 2, 9, 4, 1, 3, 7, 6, 1, 1, 2, 9, 2, 3, 3, 1, 1, 69, 1, 12, \dots]$$

Из этого разложения видно, что последовательность a_0, a_1, \dots ведет себя как ограниченная последовательность и лишь «выбросы» (например, 534, 121) в отдельных местах нарушают эту картину.

Более того, до сих пор не известно ни одного алгебраического числа, не являющегося квадратичной иррациональностью, о цепной дроби которого имелась бы достаточная информация.

Особый интерес вызывают разложения в цепную дробь некоторых классических постоянных. Число таких постоянных, для которых известно разложение в цепную дробь, весьма невелико.

Л. Эйлер нашел разложение числа e в цепную дробь

$$e = 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \dots \quad (10)$$

где закон образования неполных частных a_0, a_1, \dots таков:

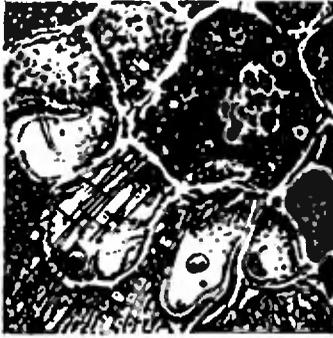
$$\begin{aligned} a_0 = 2, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1, \\ a_4 = 1, a_5 = 4, \dots, \\ a_{3m} = a_{3m-2} = 1, a_{3m-1} = 2m, \\ m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Напомним, что

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 2,718281828459045\dots$$

Вывод соотношения (10) хотя и нетруден, но не является элементарным. Отметим, что такое же «хорошее» разложение в цепную дробь для числа π никому не известно.

Мы рассказали здесь лишь о небольшой части задач, в которых встречаются цепные дроби. На самом деле круг их применения, в особенности когда оперируют аналогичным образом с функциональными дробями, весьма широк. Это богатая и сложная область математики, весьма далекая от своего завершения.



Левая спираль ДНК

Доктор физико-математических наук
М. Д. ФРАНК-КАМЕНЕЦКИЙ

Тридцать лет прошло с тех пор, когда в 1953 году Дж. Уотсон и Ф. Крик предложили свою модель строения молекулы ДНК. И все это время двойная спираль ДНК привлекала большое внимание физиков и математиков, химиков и биологов, медиков и фармацевтов. Такой интерес вполне понятен — ведь в полимерной молекуле ДНК в виде определенной последовательности мономерных звеньев (нуклеотидов) всего лишь четырех сортов заключена вся генетическая информация, содержится план строения целого живого организма.

Напомним, что, согласно модели Уотсона—Крика, молекула ДНК представляет собой две полимерные цепочки, закрученные в двойную спираль, вернее — в винтовую линию. Характерно, что закручивание цепочек — правое, то есть такое же, как у обычных шурупов или винтов.

В течение многих лет ученые были уверены в том, что лишь такую структуру может иметь ДНК и в клетке, и в пробирке при обычных условиях. Это подтверждалось многочисленными экспериментами, проводящимися самыми разными физическими методами. Однако в 1979 году группа американских ученых из Массачусетского технологического института совершенно неожиданно обнаружила новую форму молекулы

ДНК. По-видимому, это было наиболее важным открытием в области изучения структуры ДНК со времен работы Уотсона и Крика.

Ученые работали с очень короткими молекулами, состоящими всего из шести нуклеотидов (поэтому их называют гексануклеотидами) двух типов — цитозинового (Ц) и гуанинового (Г):

Ц Г Ц Г Ц Г
Г Ц Г Ц Г Ц

и им удалось впервые получить из молекул ДНК настоящие кристаллы.

Известно, что сейчас самым точным методом исследования внутреннего строения кристаллов является рентгеноструктурный анализ. Метод основан на явлении дифракции волн. Анализируя дифракционную картину, полученную от кристалла, можно узнать о нем все — каково расположение молекул в кристалле и как «уложены» атомы внутри молекул.

Каким же было удивление американских ученых, когда после получения всех необходимых данных и проведения на ЭВМ громоздких расчетов они нашли, наконец, структуру гексануклеотида. Оказалось, что первая же структура, определенная методом рентгеноструктурного анализа, очень сильно отличается от модели Уотсона—Крика. И прежде всего — направлением закручивания цепочек в спираль. У гексануклеотида оно не правое, а левое! Есть и другие отличия этой новой формы, которую назвали Z-формой, от классической, называемой теперь B-формой.

Так что же, модель Уотсона—Крика неверна?! Нет, такого категоричного заявления из открытия американских ученых не последовало. Исследования других коротких молекул ДНК, проведенные в последние годы, показали, что в Z-форме могут находиться только такие молекулы, в каждой из комплементарных цепей которых строго чередуются нуклеотиды типа Ц и Г. Все остальные произвольные последователь-

(Окончание см. на с. 38)



Неоновая лампочка

Кандидат физико-математических наук
А. А. БОРОВОЙ

Один из довольно распространенных элементов многих радиосхем — это неоновая лампочка. Она применяется, в основном, в качестве какого-либо индикатора, например индикатора настройки колебательного контура в резонанс.

На рисунке 1 изображены внешний вид и условное схематичное обозначение лампочки типа ТН-0,2-2*. В стеклянный баллон, заполненный неонам, впаяны два электрода — один в виде пластинки, другой в виде проволоочки. Когда между электродами создается соответствующее напряжение, в газе возникает тлеющий разряд, который сопровождается свечением красно-оранжевого цвета.

Несмотря на простоту устройства, неоновая лампочка позволяет провести целый ряд интересных опытов и наблюдений. Лампочку можно приобрести в магазине радиотоваров или позаимствовать из пришедших в негодность приборов.

Немного о тлеющем разряде

Возьмите обычную пластмассовую расческу, несколько раз проведите ею по волосам, а затем прикоснитесь к цоколю лампочки. На короткое время между электродами вспыхнет

*) Буквы и цифры означают следующее: Т — тлеющий разряд; Н — неоновая лампочка; 0, 2 — наибольшее значение тока, намеренное в миллиамперах; 2 — конструктивный номер.

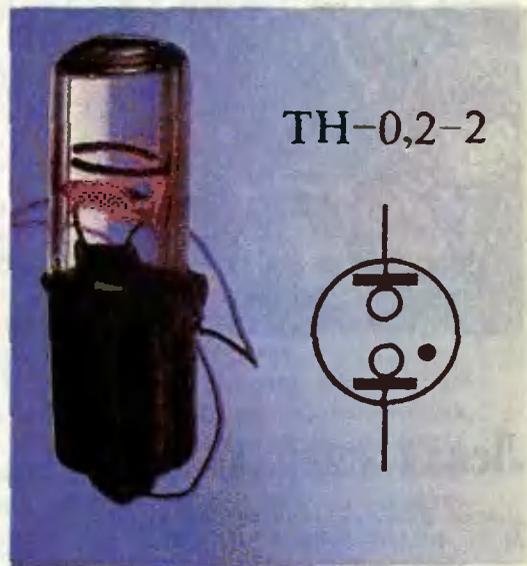


Рис. 1.

огонек — это и есть тлеющий разряд. Так просто можно наблюдать явление, которое в свое время привлекло внимание многих физиков и немало их «помучило».

Его изучению помогло, в частности, изобретение в середине XIX века ртутного вакуумного насоса. На-

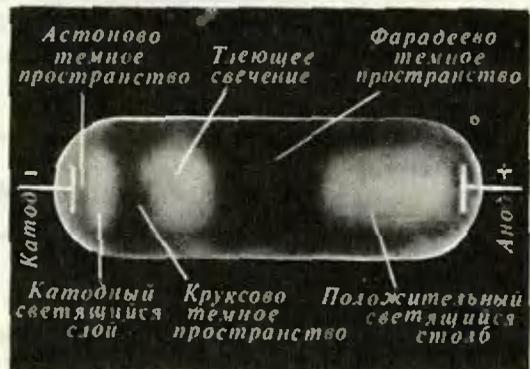


Рис. 2. Структура разряда довольно сложная. Если двигаться от катода к аноду, то на пути встретятся; небольшое по протяженности темное пространство Астона у самого катода; тонкий светящийся слой; более протяженное темное пространство Крукса; светящийся слой, то есть собственно тлеющий разряд; темное пространство Фарадея; положительно светящийся столб у анода. Из названий различных участков разряда следует, что его изучением занимались Фарадей, Крукс и Астон, а также Дж. Дж. Томсон, Ланжевэн, Рентген и другие выдающиеся ученые. Изучение тлеющего разряда принесло немало открытий. Достаточно назвать открытие электрона, рентгеновских лучей, изотопов.

сос этот позволял понижать давление газа в откачиваемой трубке до нескольких миллиметров ртутного столба. Если при таком давлении к электродам, помещенным в газ, приложить напряжение порядка 1000 В, то в трубке вспыхнет тлеющий разряд (рис. 2).

Для того чтобы в газе протекал заметный электрический ток, необходимо, чтобы там существовало достаточное количество носителей тока — ионов и свободных электронов. Как они возникают?

Когда к электродам прикладывают напряженное, небольшое число заряженных частиц, всегда существующих в газе, ускоряются электрическим полем и образуют новые электроны и ионы. В основном, этот процесс идет двумя путями: во-первых, за счет ударов энергичных электронов по молекулам газа и их ионизации и, во-вторых, за счет того, что ускоренные ионы бомбардируют катод и выбивают из него новые свободные электроны.

Кроме ионизации молекул газа, в разряде происходят и другие процессы — возбуждение нейтральных молекул и рекомбинация ионов и электронов. Они и обуславливают свечение газа.

Тлеющий разряд может быть очень красивым. В этом легко убедиться, посмотрев на газосветные лампы реклам. В них неон горит ярким красно-оранжевым, а аргон синевато-зеленым светом.

Но вернемся к нашей лампочке. Оказывается, если начать сближать анод и катод в трубке, то сначала уменьшится, а затем и вовсе пропадет положительно светящийся столб. Именно в таком «укороченном» виде и существует разряд в лампочке.

Для того чтобы она зажигалась при не очень большом напряжении, электроды лампочки покрывают специальным составом, содержащим соли лития и бария. Под действием ионных ударов такой катод легко отдает электроны, и напряжение зажигания снижается. У лампочки ТН-0,2-2 оно составляет всего 80—90 В. Цвет ее свечения может быть красным или красновато-

оранжевым, в зависимости от того, какие газы и в каком количестве добавлены к неону.

Не совсем обычные свойства неоновой лампочки

Теперь проведем опыт с целью исследования свойств самой лампочки. Для этого соберем схему, изображенную на рисунке 3. К точкам А и В подключим источник постоянного напряжения $U_{AB} \approx 100$ В. Это могут быть соединенные последовательно батарейки, промышленный или самодельный выпрямитель (последний можно собрать, например, по схеме, приведенной в книге В. О. Борисова «Юный радиолюбитель»). Вольтметр V имеет предел измерения 150 В, максимальное сопротивление резистора, выполняющего роль потенциометра, равно $R = 100$ кОм.

Будем постепенно увеличивать напряжение на лампочке. Сначала ток через нее практически не идет — мало носителей заряда. При некотором напряжении, называемом напряжением зажигания $U_{\text{зажиг}}$ (≈ 80 В), начинается активный процесс образования ионов и свободных электронов, и вспыхивает тлеющий разряд. В этот момент сопротивление лампочки уменьшается, а ток увеличивается. В результате напряжение на лампочке падает до так называемого рабочего напряжения $U_{\text{раб}}$ (≈ 60 В). Перемещая дальше ручку потенциометра, мы заметим, что показания вольтметра не изменяются, а ток увеличивается — все большая площадь электрода охватывается разрядом. При еще большем напряжении (больше 100 В) в лампочке вспыхнет дуговой разряд, и она выйдет из строя. Хорошо, что наша

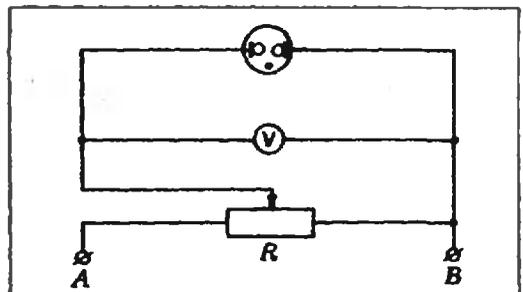


Рис. 3.

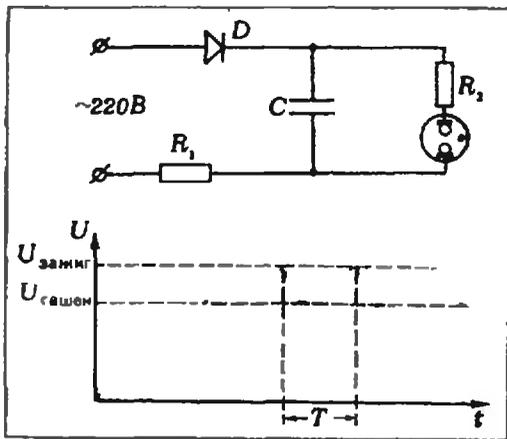


Рис. 4.

схема не позволяет продемонстрировать это.

Если проводить этот опыт в слабо освещенной комнате, а потом осветить лампочку ярким светом, например с помощью мощной лампы и линзы, фокусирующей световой пучок на лампочку, то напряжение зажигания заметно уменьшится. (Придется, правда, внимательно приглядываться, когда вспыхнет лампочка — на ярком свете ее свечение едва заметно.) Уменьшение напряжения происходит потому, что свет, падая на покрытые специальным составом электроды, выбивает из них электроны и тем самым способствует началу разряда. Таким образом, лампочка может работать как своеобразный светочувствительный элемент.

Читателям представляется возможность самостоятельно придумать схемы, использующие это свойство лампочки.

Мигающая лампочка

Тот факт, что напряжение зажигания разряда в неоновой лампочке выше рабочего напряжения горения, позволяет сделать с помощью лампочки простой генератор колебаний. Одна из возможных схем приведена на рисунке 4. В схеме используется конденсатор емкостью $C=1$ мкФ, рассчитанный на напряжение до 300 В; сопротивления резисторов равны соответственно $R_1=1$ кОм и $R_2=47$ кОм; диод D может быть любого типа, лишь бы его обратное напряжение было больше 350 В

(в принципе, можно работать и с выпрямителем, упоминавшимся в предыдущем опыте).

Работает генератор следующим образом. В момент включения в сеть конденсатор начинает заряжаться через резистор с сопротивлением R_1 . При этом лампочка не горит (ее сопротивление можно считать бесконечно большим). С течением времени напряжение на обкладках конденсатора увеличивается. Когда оно станет равным $U_{\text{зажиг}}$, лампочка вспыхнет, ее сопротивление резко уменьшится и конденсатор начнет разряжаться через лампочку и второй резистор. В нашей схеме процесс этот идет с большей скоростью, чем зарядка, и продолжается до тех пор, пока напряжение на лампочке не снизится до напряжения гашения разряда $U_{\text{гашен}}$ (≈ 60 В). Лампа потухнет, и цикл повторится снова. Если воспользоваться осциллографом, то на его экране мы сможем увидеть картину, подобную той, что изображена на рисунке 4.

Меняя величины емкости C и сопротивлений R_1 и R_2 , можно получить разную продолжительность вспышки и разные значения периода колебаний T .

Описанный генератор (усовершенствованный самыми разными способами) можно использовать, скажем, для конструирования звукового генератора. Для этого параллельно лампочке через еще один конденсатор надо подключить телефон (например, ТОН-1). На таком приборе вы сможете, в частности, наблюдать и чувствительность неоновой лампочки к свету.

В заключение мы хотим посоветовать читателям, заинтересовавшимся опытами с неоновой лампочкой, познакомиться с книгой В. Ф. Шилова «Конструкции на неоновой лампе». В ней собраны десятки схем, доступных для выполнения школьникам-радиолюбителям.



Раскраска плоскости и теорема

Ван дер Вардена о прогрессиях

С. И. БЕСПАМЯТНЫХ

В этой заметке мы докажем следующее красивое обобщение результата задачи М750.

Теорема о раскраске. Пусть каждая клетка бесконечного листа клетчатой бумаги окрашена в один из N цветов. Тогда для любого набора клеток a_1, \dots, a_l найдется набор одинаково окрашенных клеток b_1, \dots, b_l , подобный первому в том смысле, что (см. рис. 1) $\overline{B_j B_i} = d \overline{A_j A_i}$, при всех $i, j = 1, \dots, l$, где $A_1, \dots, A_l, B_1, \dots, B_l$ — центры клеток $a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_l$ соответственно, а d — некоторое натуральное число; иначе говоря, фигуры, образованные центрами клеток b_1, \dots, b_l и a_1, \dots, a_l гомотетичны с коэффициентом d .

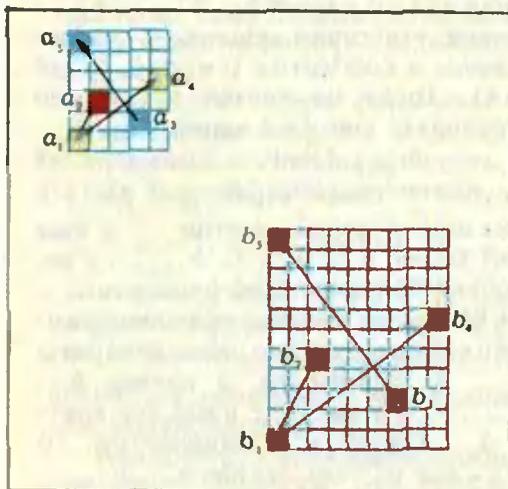


Рис. 1.

Более того, такой набор клеток можно найти в любом квадрате $m \times m$, где m — достаточно большое число, зависящее от количества цветов N и заданного набора a_1, \dots, a_l .

(Обратите внимание: «подобие наборов клеток» означает у нас не совсем то, что обычное понятие «подобия фигур»!).

Интересна история этой теоремы. В 1928 году один математик, работавший в крупном математическом центре — Геттингене, столкнулся с таким вопросом: можно ли утверждать, что при любом разбиении множества натуральных чисел на две части (или на конечное число частей), хотя бы в одной из них найдется арифметическая прогрессия сколь угодно большой заданной длины? Представлялось почти очевидным, что ответ здесь положительный. Однако доказать это, несмотря на кажущуюся простоту задачи, поначалу никому не удавалось, и вскоре она сделалась предметом всеобщего увлечения. Первым добился успеха молодой голландец Б. Л. Ван дер Варден, ставший впоследствии известным математиком. После нескольких недель работы он нашел не простое, но вполне элементарное доказательство, основанное на хитроумном применении математической индукции и «принципа Дирихле» (см. например, «Квант», 1977, № 2, с. 17). В 40-х годах теорема Ван дер Вардена была перенесена на n -мерный случай; теорема о раскраске — это случай размерности $n=2$.

Вот одна из формулировок теоремы Ван дер Вардена, несколько обобщающая исходную задачу.

Для любых чисел N и l можно указать такое число $m = m(N, l)$, что при произвольном разбиении отрезка натурального ряда длины m на N классов по крайней мере в одном из них найдется арифметическая прогрессия длины l .

Покажем, как можно вывести эту теорему из теоремы о раскраске. Возьмем любые m последовательных натуральных чисел и занумеруем ими столбцы квадрата $m \times m$; разбиению этих чисел на N классов сопоставим

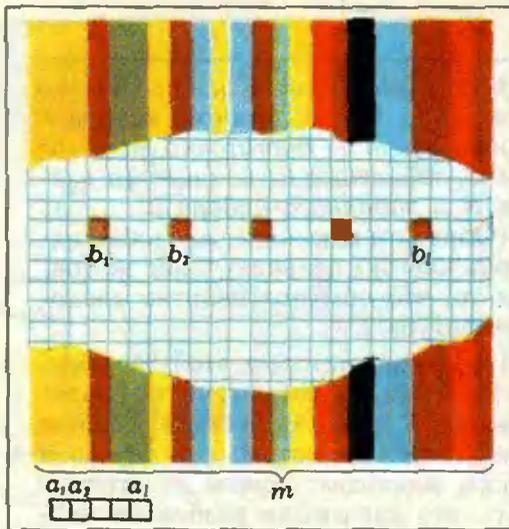


Рис. 2.

раскраску квадрата в N цветов, при которой все клетки всех столбцов, чьи номера входят в один и тот же класс, получают один и тот же цвет (рис. 2). Пусть теперь a_1, \dots, a_l — горизонтальный ряд из l последовательных клеток. Тогда по теореме о раскраске при достаточно большом m в нашем квадрате найдется набор одноцветных клеток b_1, \dots, b_l , подобный набору a_1, \dots, a_l , то есть горизонтальный ряд равностоящих друг от друга клеток. Очевидно, что номера столбцов, содержащих клетки b_1, \dots, b_l , образуют искомую прогрессию (разность d этой прогрессии равна «коэффициенту подобия» наборов a_1, \dots, a_l и b_1, \dots, b_l).

Переходя к доказательству теоремы о раскраске, условимся рассматривать не произвольные наборы клеток a_1, \dots, a_l , а некоторые «стандартные» — такие, как на рисунке 3. Ясно, что от этого общность не пострадает, потому что любой набор клеток можно дополнить до «стандартного», причем если утверждение

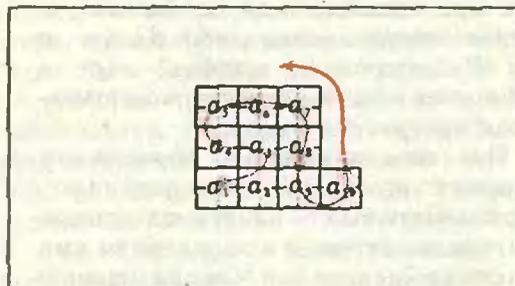


Рис. 3.

теоремы будет доказано для дополненного — «стандартного» — набора, то оно заведомо будет справедливо и для исходного. Наборы клеток, подобные «стандартным» наборам, назовем *сериями*, коэффициент подобия — *коэффициентом серии*; *серией квадратов* будет называться набор конгруэнтных квадратов, состоящих из клеток нашего бесконечного листа, левые нижние клетки которых образуют серию (очевидно, любые соответственные клетки таких квадратов тоже образуют серию). Наконец, два конгруэнтных раскрашенных квадрата назовем *однотипными*, если они раскрашены одинаково, то есть их раскраски совпадают при параллельном переносе, совмещающем квадраты.

Таким образом, мы должны доказать, что, каковы бы ни были числа N и l , при достаточно большом $m = m(N, l)$ в квадрате $m \times m$, произвольно раскрашенном в N цветов, всегда найдется одноцветная серия b_1, \dots, b_l длины l .

Доказательство будем вести индукцией по l .

При $l=1$, очевидно, можно взять $m(N, 1) = 1$, а при $l=2$ — $m(N, 2) = N+1$ (принцип Дирихле!). Допустим теперь, что утверждение теоремы верно для серий длины l при всех, сколь угодно больших N , и докажем его для серий длины $l+1$.

Поясним сначала идею доказательства. Пусть имеется серия из $l+1$ квадратов K_1, K_2, \dots, K_{l+1} и в каждом из квадратов K_j выбрана серия из $l+1$ клеток $b_{1,j}, b_{2,j}, \dots, b_{l+1,j}$, причем эти серии *одинаково расположены в квадратах* (см. рис. 4, где $l=4$). Тогда из клеток $b_{i,j}$ можно образовать еще $l+1$ серий вида $b_{1,j}, b_{2,j}, \dots, b_{l+1,j}$ ($j=1, \dots, l+1$) — на рисунке 4 такая серия для $j=l+1$ показана розовым цветом — и еще одну серию $b_{1,1}, b_{2,2}, \dots, b_{l+1,l+1}$ с несколько большим коэффициентом — эти клетки на рисунке обведены рамками. Если известно, что квадраты K_1, \dots, K_l однотипны, а клетки $b_{1,1}, b_{1,2}, \dots, b_{1,l}$ (а вместе с ними все клетки $b_{i,j}$, где $i, j < l$) одноцветны, то в каждой из трех серий: $b_{1,1}, b_{1,2}, \dots, b_{1,l+1}$ (серия в квадрате K_1), $b_{1,1},$

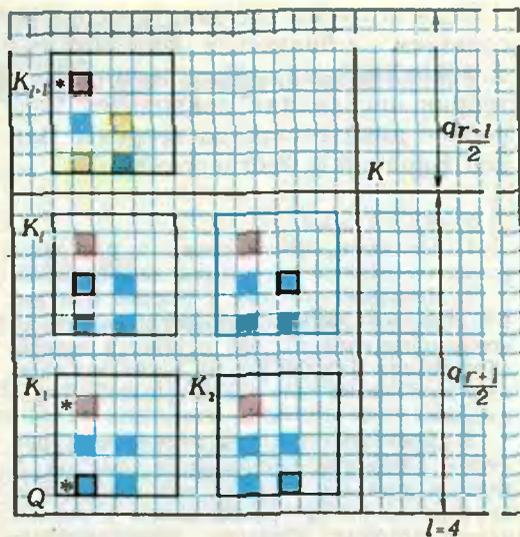


Рис. 4.

$b_{2,2}, \dots, b_{l+1,l+1}$ (серия в рамках) и $b_{1,l+1}, b_{2,l+1}, \dots, b_{l+1,l+1}$ («розовая» серия) все клетки, кроме, может быть, последней, одноцветны, а крайними клетками служат какие-то две из клеток $b_{1,1}, b_{1,l+1}$ и $b_{l+1,l+1}$ (на рисунке они помечены *). Поэтому, если среди этих трех клеток найдутся две одноцветные, мы получим одноцветную серию длины $l+1$. Так будет наверняка, по принципу Дирихле, в случае двух цветов. В случае же N цветов надо рассмотреть не двух-, а N -ступенчатую конструкцию (в больших квадратах выбирать серии квадратов поменьше, в тех — еще меньшие квадраты, и так N раз, пока не получатся клетки). При этом размер исходного квадрата должен позволить на каждой «ступени» выделять очередную серию $l+1$ квадратов, среди которых первые l однотипны — тут и должно помочь предположение индукции.

Приведем теперь формальное доказательство теоремы о раскраске. Определим последовательность (q_r) , $r=0, 1, \dots, N$, соотношениями

$$q_0 = 1, \quad q_{r+1} = 2m(N^{q_r}, l) \cdot q_r,$$

и положим $m(N, l+1) = q_N(N^{q_N})$ — это число раскрасок квадрата $q_N \times q_N$ в N цветов; существование числа $m(N^{q_r}, l)$ обеспечено предположением индукции, $l=1, 2, \dots$.

Квадрат $q_r \times q_r$ назовем *квадратом ранга r* . Покажем, что при любой раскраске квадрата K ранга $r+1$

в N цветов в нем можно выбрать серию квадратов K_1, K_2, \dots, K_{l+1} ранга r , в которой все квадраты, кроме, может быть, K_{l+1} однотипны. Представим, что квадрат K разбит на большие «клетки», каждая из которых — это квадрат ранга r ; «цветом» такой клетки будем считать любой из $N' = N^{q_r}$ способов ее раскраски в N цветов. Разделим квадрат K на 4 равных квадрата и выберем из них левый нижний — Q (рис. 4). Он состоит из $m' \times m'$ «клеток», где $m' = m(N', l)$, раскрашенных в N' «цветов», и по определению числа m' в нем найдется серия из l «клеток» одного и того же «цвета», то есть серия однотипных квадратов K_1, \dots, K_l ранга r . Остается дополнить ее до серии из $l+1$ квадратов квадратом K_{l+1} , который может и не поместиться в Q , но заведомо поместится в квадрате K .

Докажем теперь, что в качестве числа $m(N, l+1)$ можно взять q_N . Пусть K — произвольный квадрат со стороной $m = q_N$, то есть ранга N , окрашенный в N цветов. Выделим в нем серию квадратов $K(1), \dots, K(l+1)$ ранга $N-1$, первые l из которых однотипны. Пусть d_1 — коэффициент этой серии. Выделим в квадрате $K(1)$ серию квадратов $K(1, 1), K(1, 2), \dots, K(1, l+1)$ ранга $N-2$, первые l из которых однотипны. Пусть d_2 — коэффициент этой серии и пусть $K(i, j)$ — это квадрат, который получается из $K(1, j)$ при переносе, совмещающем $K(1)$ и $K(i)$, $i=2, 3, \dots, l+1$, то есть при переносе на вектор $d_1 A_1 A_i$ (напомним, что A_1, A_2, \dots — центры клеток «стандартного» набора a_1, a_2, \dots). Продолжим этот процесс, выделяя в квадрате $K(1, 1)$ серию $K(1, 1, 1), K(1, 1, 2), \dots, K(1, 1, l+1)$ квадратов ранга $N-3$ с коэффициентом d_3 и «разнося» ее по своим квадратам $K(i, j)$ и т. д. Через N шагов мы получим квадраты ранга 0, то есть клетки — $K(i_1, i_2, \dots, i_N)$ ($i_k=1, \dots, l+1$). Каждая из этих клеток является последним звеном в цепочке вложенных квадратов более высоких рангов: $K(i_1) \supset K(i_1, i_2) \supset \dots \supset K(i_1, i_2, \dots, i_N)$. С учетом правила построения серий квадратов отсюда

легко вывести следующие свойства:

1) квадраты $K(i_1, i_2, \dots, i_s, i_{s+1}, \dots, i_r)$ и $K(i'_1, i'_2, \dots, i'_s, i'_{s+1}, \dots, i'_r)$, у которых первые s индексов не превосходят l (а остальные совпадают), однотипны; в частности, при заданных p и q ($p, q \geq 0, p+q < N$) клетки $b_i =$

$$= K(\underbrace{1, \dots, 1}_{p \text{ раз}}, \underbrace{i, \dots, i}_{N-p-q \text{ раз}}, \underbrace{l+1, \dots, l+1}_{q \text{ раз}}) \quad (1)$$

имеют один и тот же цвет при всех $i = 1, \dots, l$;

2) вектор, соединяющий центры квадратов $K(i_1, i_2, \dots, i_r)$ и $K(j_1, j_2, \dots, j_r)$ равен $d_1 A_{i_1} \vec{A}_{j_1} + d_2 A_{i_2} \vec{A}_{j_2} + \dots + d_r A_{i_r} \vec{A}_{j_r}$; в частности, для клеток b_i и b_{i+1} (см. (1)) он равен $(d_{p+1} + d_{p+2} + \dots + d_{N-q}) A_i A_{i+1}$.

Теперь мы уже недалеко от цели. Рассмотрим следующие $N+1$ клеток: $K(l+1, l+1, l+1, \dots, l+1)$, $K(1, l+1, l+1, \dots, l+1)$, $K(1, 1, l+1, \dots, l+1)$, ..., $K(1, 1, 1, \dots, 1)$. По принципу Дирихле хотя бы две из них одноцветны. Пусть для определенности это будут клетки $b_1 = K(1, 1, 1, \dots, l+1)$ и $b_{i+1} = K(1, l+1, l+1, \dots, l+1)$ (ср. (1) при $p=1, q=N-3$). Тогда из свойств 1) и 2) вытекает, что клетки b_1, b_2, \dots, b_{i+1} , где $b_i = K(1, i, i, l+1, \dots, l+1)$, образуют искомую одноцветную серию (с коэффициентом $d_2 + d_3$). Теорема о раскраске доказана.

Если эта тема вас заинтересовала, советуем обратиться к книжке А. Я. Хинчина «Три жемчужины теории чисел», где приводится подробное доказательство теоремы Ван дер Вардена о прогрессиях.

Упражнения

1. Показать, что теорема о раскраске позволяет решить все пункты задачи М750.

2. Доказать, что если в теореме Ван дер Вардена слово «арифметическая» заменить на «геометрическая», то она останется верной. (Кстати, сам Ван дер Варден доказывал свою теорему именно для геометрических прогрессий.)

3. Доказать, что при любом n и при любом разбиении натурального ряда на N классов хотя бы один из них содержит n арифметических прогрессий длины n , первые члены которых образуют геометрическую прогрессию.

4. Привести пример разбиения натурального ряда на два подмножества, ни одно из которых не содержит:

а) бесконечной арифметической прогрессии;

б) бесконечной геометрической прогрессии; в) ни бесконечной арифметической прогрессии, ни бесконечной геометрической прогрессии.

5. Привести пример раскраски клеток в два цвета, при которой не найдется бесконечного множества вертикальных и бесконечного множества горизонтальных прямых, в пересечении которых получаются центры одноцветных клеток.

6. Доказать, что при любой раскраске клеток в k цветов найдется бесконечное множество вертикальных прямых $\{x_i\}$ и бесконечное множество горизонтальных прямых $\{y_j\}$ ($i=1, 2, 3, \dots$) такие, что в пересечении прямых y_i и x_j , где $i > j$, получатся центры одноцветных клеток.

Левая спираль ДНК

(Начало см. на с. 31)

ности находятся, как это и считалось раньше, в В-форме.

Возникает вопрос, что будет, если в длинной молекуле ДНК (напомним, что обычная длинная молекула содержит десятки тысяч нуклеотидов) окажется участок, имеющий последовательность ... ЦГЦГ ...? Опыты показали, что при определенных условиях такой участок действительно находится в Z-форме, хотя вокруг него ДНК остается в обычной форме. Имеются доказательства то-

го, что такое возможно и внутри клетки.

Открытие левой спирали и возможности ее существования в «работающей» ДНК вызвало огромный интерес. Во многих лабораториях мира сейчас интенсивно исследуются свойства новой формы, условия, при которых в нее переходят соответствующие участки ДНК. Ученые пытаются выяснить ту роль, которую Z-форма и вообще способность ДНК изменять свою структуру играют в работе этой молекулы в клетке.

Несомненно, ближайшие годы принесут еще много интересных открытий в этой области.

Задачи

1. Восемь косточек домино лежат на столе так, как показано на рисунке. Какое значение имеет закрытая часть косточки домино, если эти косточки можно расположить в «магический квадрат» 4×4 (то есть так, чтобы сумма очков на косточках в каждом вертикальном ряду, в каждом горизонтальном ряду и по каждой диагонали была одинаковой)? Добейтесь такого расположения.

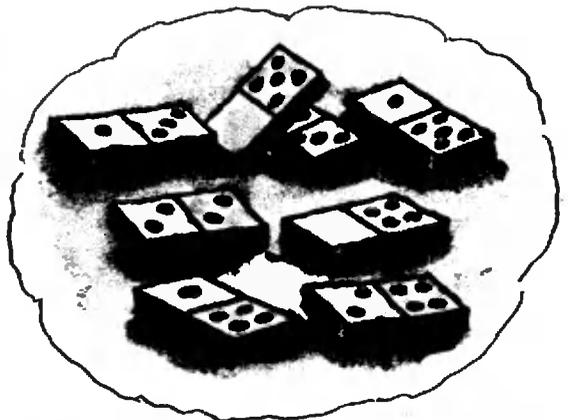
2. Братья Алеша и Боря родились в августе. В школе начинают учиться с семи лет. Номер класса, в котором учится сейчас старший брат Борис, равен возрасту Алеша. В какой класс перейдет Алеша, когда Борис окончит среднюю школу?

3. На прямой расположили несколько точек. Затем между каждыми двумя соседними точками поставили еще по точке. И так несколько раз. Докажите, что после каждой такой операции общее количество точек будет нечетным.

4. Дорога от дома до школы занимает у Пети 20 минут. Однажды он по дороге в школу вспомнил, что забыл дома ручку. Петя знал, что если он продолжит путь в школу с той же скоростью, то придет туда за 8 минут до звонка, а если вернется домой за ручкой, то, двигаясь с той же скоростью, опоздает к началу урока на 10 минут. Какую часть пути он прошел?

5. Известно, что направление вращения Земли вокруг своей оси совпадает с направлением обращения Земли по орбите вокруг Солнца. На сколько бы изменилась продолжительность земных суток, если бы Земля вращалась вокруг своей оси с той же угловой скоростью в противоположном направлении?

Эти задачи нам предложили
В. Д. Вьин, С. В. Дворянинов, В. В. Егоров,
А. П. Савин, Е. Д. Сергиенко





Дом, который построил...

А. В. ТОКАРЕВ

Выдающийся итальянский архитектор XVI века Андреа Палладио считал, что в каждой постройке должны быть соблюдены три вещи, без которых ни одно здание не может заслужить одобрения. Это — польза (и удобство), красота и долговечность. Оставим в стороне соображения удобства и красоты и поговорим о долговечности, или, другими словами, о надежности постройки.

Наверное, каждый из вас знает, что строительство любого сооружения начинается с закладки фундамента. Хороший, прочный фундамент — залог дальнейшего успеха. Но что это значит — прочный фундамент?

Много вопросов приходится решать специалистам. Один из них — борьба с осадкой фундамента. Особые трудности, связанные с этой проблемой, возникают при возведении сооружений на вечной мерзлоте. Построенные там дома часто дают трещины из-за неравномерной осадки фундамента, вызванной подтаиванием грунта под ним.

Можно ли избежать подтаивания грунта под домами, построенными на вечной мерзлоте, или хотя бы уменьшить подтаивание?

Давайте попытаемся решить эту задачу, исходя только из знаний простейших физических законов и закономерностей.

Прежде всего, проанализируем условие задачи. Почему грунт под домом может начать подтаивать? Очевидно, потому, что фундамент передает ему некоторое количество теплоты. Значит, все дело в фундаменте. Тогда, первое, что напрашивается сделать, это уменьшить площадь соприкосновения фундамента с грунтом. Именно с этой целью здания стали строить на сваях, отказавшись от привычного сплошного фундамента. Но этого оказалось недостаточно.

Как еще можно уменьшить приток тепла к грунту? В данном случае тепло передается только теплопроводностью; следовательно, материал свай должен проводить тепло как можно хуже. Из чего же нужно делать сваи?

Для количественной оценки теплопроводности различных веществ вводится специальная физическая величина — коэффициент теплопроводности. Для каждого вещества он свой. Самую большую теплопроводность имеют металлы, у жидкостей теплопроводность невелика, у газов — еще меньше. Для наших рассуждений не важно, как именно

определяется коэффициент теплопроводности и в каких единицах он измеряется. Нам интересно лишь сравнить способности различных материалов проводить тепло. Поэтому воспользуемся справочником*) и составим небольшую таблицу относительных коэффициентов теплопроводности, выбрав теплопроводность воды за единицу:

Вещество	Относительный коэффициент теплопроводности	Вещество	Относительный коэффициент теплопроводности
Бензин	0,2	Железо	122
Вата	0,07	Керосин	0,2
Вода	1	Кирпич	1,1
Воздух	0,04	Лед	3,7
Войлок	0,1	Пробка	0,07
Дерево	0,2—0,6	Спирт	0,3

Посмотрим внимательно на эту таблицу. Из твердых материалов наименьшей теплопроводностью обладают вата и пробка, затем идут дерево и кирпич. Однако прежде всего свая должна быть прочной, так что все перечисленные материалы явно не подходят. А что, если свая сделать из металла, например из железа, и внутрь ее поместить вату, войлок или какое-то другое пористое вещество, содержащее много воздуха? Это — выход!

Итак, свая должна быть изготовлена из прочного твердого материала и заполнена каким-либо пористым веществом.

Анализируя полученный результат, делаем вывод: благодаря малой теплопроводности, свая указанной конструкции действительно уменьшит приток тепла от окружающего воздуха к грунту (то есть сверху вниз) в теплое время года. А в холодное? Хорошо бы сделать так, чтобы зимой, во время сильных морозов, свая способствовала охлаждению грунта (то есть передавала бы тепло снизу вверх). Это увеличило бы прочность грунта и уменьшило степень его подтаивания летом.

Сформулируем более четко, какие же физические процессы происходят в свае и в грунте около нее летом и зимой. В теплое время года

верхняя часть сваи, соприкасаясь с воздухом, нагревается. Постепенно будет нагреваться и та часть сваи, которая находится в земле. Чем меньше нагреется нижний конец сваи, а значит и прилегающий к ней грунт, тем лучше. Зимой верхняя часть сваи охлаждается от соприкосновения с холодным воздухом. Постепенно охлаждается и нижняя часть сваи, и грунт вокруг нее. Чем ниже температура, до которой охладится грунт, тем лучше.

Таким образом, свая должна обладать следующими свойствами:

а) если температура верхней части сваи выше, чем нижней, то свая должна проводить тепло плохо;

б) если верхний конец сваи холоднее нижнего, то свая должна проводить тепло хорошо.

Или, другими словами:

сверху вниз передача тепла должна происходить плохо, а снизу вверх — хорошо.

Как известно, в твердых телах теплообмен осуществляется только за счет теплопроводности, которая не зависит от направления. Это означает, что свая с перечисленными выше свойствами не может быть изготовлена из твердого тела. Наша предыдущая модель — металлическая свая, заполненная пористыми материалами, — не годится (пористая «внутренность» сваи будет плохо проводить тепло не только летом, но и зимой, когда желательнее, чтобы грунт хорошенько охладился).

А что, если прочную оболочку сваи, способную выдержать большую нагрузку, заполнить жидкостью или газом? В этом случае передача тепла будет осуществляться не только теплопроводностью, но и конвекцией. К чему это приведет?

Зимой верхние слои жидкости или газа будут охлаждаться и, как более плотные, будут опускаться вниз. Их место займут менее плотные нижние слои, которые будут, в свою очередь, охлаждаться и опускаться вниз и т. д. В результате свая и грунт вокруг нее примут температуру окружающего воздуха, то есть охладятся за счет естественных морозов. В летнее время верхние слои жидкости или газа будут, ко-

*) А. С. Енохович. «Справочник по физике». (М., Просвещение, 1978.)

нечно, нагреваться окружающим воздухом, но, как менее плотные, опускаться вниз они не будут. Передача тепла будет осуществляться только теплопроводностью, а она у жидкостей и газов очень мала.

Значит, свая такой конструкции летом будет проводить тепло плохо, и грунт вокруг нее прогреется незначительно.

Итак, мы приходим к выводу: сваю, изготовленную из прочного материала, необходимо заполнить жидкостью или газом.

Остается последний вопрос — чем именно надо заполнить сваю? Зимой это все равно, так как в течение долгого холодного периода температура грунта успеет понизиться до температуры окружающего воздуха. Летом же важно, чтобы грунт прогрелся как можно меньше. Значит, надо подобрать такое тело, которое, получая тепло, нагревалось бы меньше всего. Из формулы

$$Q = cm(t_2 - t_1)$$

получаем, что изменение температуры $(t_2 - t_1)$ зависит не только от полученного количества теплоты Q , но и от удельной теплоемкости c тела и от его массы m .

Масса жидкости всегда больше массы газа того же объема. Из этих соображений предпочтение следует отдать жидкости. Теперь сравним удельные теплоемкости, воспользовавшись уже упоминавшимся справочником:

Вещество	Удельная теплоемкость, кДж/(кг · К)
Бензин	1,4
Вода	4,2
Воздух	1
Глицерин	2,4
Керосин	2,1
Масло машинное	1,9

Оказывается, и удельные теплоемкости больше у жидкостей, чем у газов.

Следовательно, сваю надо заполнять жидкостью. Но какой? Вода, хотя и самая дешевая и доступная, не подходит, поскольку она зимой замерзает. Глицерин и машинное масло при низких температурах

густеют, что затрудняет конвекцию. Остаются бензин и керосин. Обе жидкости замерзают при температуре ниже -50°C , так что каждая из них могла бы «выдержать» суровые зимние морозы. Однако выбираем все же керосин, поскольку у него большая удельная теплоемкость и он дешевле бензина.

Наконец-то мы можем сформулировать окончательный ответ задачи.

Итак, чтобы уменьшить подтаивание грунта под домами, построенными на вечной мерзлоте, здания надо строить на сваях; сваи, изготовленные из прочного твердого материала, внутри должны быть заполнены керосином.

Заметим, что такой способ укрепления мерзлых оснований (уменьшения подтаивания грунта под фундаментом) — не фантастика, а реальность. Он детально разработан теоретически и испытан в производственных условиях. При этом получено существенное снижение себестоимости строительства.

Теперь, когда вы убедились в том, что, зная основные физические закономерности, можно решать сложные практические задачи, попробуйте самостоятельно объяснить один интересный случай «нарушения» законов природы. Случай этот описан в книге А. П. Нечаева «Чудеса без чудес»:

«...Был подан самовар. Из-под крышки валил пар. Стали заваривать чай, и оказалось — вода холодная!».

Добавим только, что описанный случай произошел в конце XIX века, когда самовары, в отличие от современных электрических, были углевыми.



задачник Кванта

Задачи

М806—М810; Ф818—Ф822

М806. а) Докажите, что если

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \dots + \frac{a_n}{n} = 0,$$

то многочлен $a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_2 x + a_1$ имеет корень между 0 и 1.

б) Докажите, что если для некоторого $p > 0$

$$\frac{a_1}{p+1} + \frac{a_2}{p+2} + \frac{a_3}{p+3} + \dots + \frac{a_n}{p+n} = 0,$$

то этот многочлен также имеет корень между 0 и 1.

А. Гохберг, М. Овецкий, ученики 10 кл., Донецк

М807. а) Из произвольной точки M внутри равностороннего треугольника опущены перпендикуляры MK_1 , MK_2 , MK_3 на его стороны.

Докажите, что сумма векторов $\vec{MK}_1 + \vec{MK}_2 + \vec{MK}_3$ равна $\frac{3}{2} \cdot \vec{MO}$, где O — центр треугольника.

б) Из произвольной точки M опущены перпендикуляры MK_1, \dots, MK_n на все стороны правильного n -угольника (или их продолжения). Докажите, что

$$\vec{MK}_1 + \dots + \vec{MK}_n = \frac{n}{2} \vec{MO},$$

где O — центр n -угольника.

в) Из произвольной точки M внутри правильного тетраэдра опущены перпендикуляры MK_1, MK_2, MK_3, MK_4 на его грани. Докажите, что

$$\vec{MK}_1 + \vec{MK}_2 + \vec{MK}_3 + \vec{MK}_4 = \frac{4}{3} \vec{MO}.$$

где O — центр тетраэдра.

В. В. Присолов

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 августа 1983 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 6 — 83» и номера задач, решения которых вы посылаете, например: «М806, М807» или «Ф818». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M808. На бесконечном листе клетчатой бумаги двое играют в такую игру: первый окрашивает какую-нибудь клетку в красный цвет, второй — k (неокрашенных) клеток — в синий цвет, затем снова первый одну (неокрашенную) — в красный, второй — k клеток — в синий и т. д. Первый стремится к тому, чтобы какие-нибудь четыре красные клетки расположились в вершинах квадрата (со сторонами, параллельными линиям сетки). Сможет ли второй ему помешать а) при $k=1$; б) * при $k=2$; в) ** при каком-либо $k>1$?

Д. Г. Азов

M809. Найдите сумму

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n-1}{n!}$$

(через $k!$ обозначается произведение $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$).

В. В. Произволов

M810*. Докажите, что в любой выпуклый многоугольник M можно поместить прямоугольник, площадь которого не меньше $1/4$ площади многоугольника M .

Ф. В. Вайнштейн

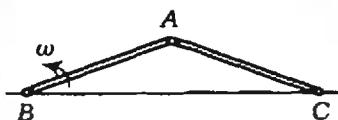


Рис. 1.

Ф818. Два жестких стержня длины l каждый шарнирно скреплены в точке A (рис. 1). Стержень BA жестко закреплен в точке B , а точка C стержня AC может скользить по направляющей BC . Стержень BA начинают вращать в плоскости рисунка вокруг точки B с постоянной угловой скоростью ω . Чему будут равны максимальная скорость и ускорение точки C , если в начальный момент стержни вытянуты вдоль направляющей BC ($\angle BAC = \pi$)?

Л. Г. Маркович

Ф819. Три небольших тела, массы которых относятся как 3:4:5 (масса самого легкого тела равна m), удерживаются в трех различных точках на внутренней поверхности гладкой полусферической чаши радиуса R , которая в нижней точке прикреплена к горизонтальной поверхности. В некоторый момент тела отпускают и предоставляют самим себе. Какое максимальное количество тепла может выделиться в этой системе? При каком начальном положении тел это осуществится? Все соударения тел абсолютно неупругие.

С. К. Строков

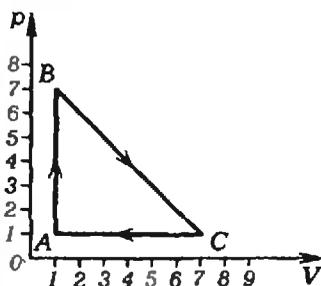


Рис. 2.

Ф820. Процесс $A-B-C-A$ производят над одним молем идеального одноатомного газа (рис. 2). Определить КПД цикла.

А. Г. Изергин, Ю. П. Малышев, В. Р. Саулит

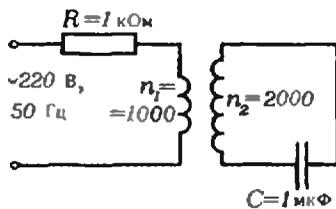


Рис. 3.

Ф821. В схеме, приведенной на рисунке 3, трансформатор идеальный. Параметры схемы указаны на рисунке. Найти амплитуду тока и сдвиг фаз в первичной цепи.

Р. З. Александров

Ф822. Ваш собеседник, сидящий напротив вас, носит очки. Сможете ли вы определить, каким дефектом зрения — близорукостью или дальнозоркостью — он обладает? (Естественно, вы не станете просить собеседника дать примерить его очки и не будете заводить о них разговор.)

М. В. Семенов

Problems

M806—M810; P818—P822

M806. a) Prove that if

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \dots + \frac{a_n}{n} = 0,$$

then the polynomial $a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_2 x + a_1$ has a root between 0 and 1;

b) Prove that if, for some $b > 0$,

$$\frac{a_1}{b+1} + \frac{a_2}{b+2} + \frac{a_3}{b+3} + \dots + \frac{a_n}{b+n} = 0,$$

then this polynomial also has a root between 0 and 1.

A. Gohberg, M. Ovetski, 10th grade students, Donetsk.

M807. a) Perpendiculars MK_1, MK_2, MK_3 to the sides of an equilateral triangle are drawn from an arbitrary point M inside it. Prove that the vector sum $\vec{MK}_1 + \vec{MK}_2 + \vec{MK}_3$ equals $(3/2) \cdot \vec{MO}$, where O is the triangle's centre.

b) Perpendiculars MK_1, \dots, MK_n to all the n sides of a regular polygon are drawn from an arbitrary point inside it. Prove that

$$\vec{MK}_1 + \dots + \vec{MK}_n = \frac{n}{2} \vec{MO},$$

where O is the centre of the polygon.

c) Perpendiculars MK_1, \dots, MK_4 to the faces of a regular tetrahedron are drawn from an arbitrary point inside it. Prove that

$$\vec{MK}_1 + \vec{MK}_2 + \vec{MK}_3 + \vec{MK}_4 = \frac{4}{3} \vec{MO},$$

where O is the centre of the tetrahedron.

V. V. Prasolov

M808. Two persons play the following game on an infinite plane square lattice: the first player colours one node in red, the second colours k (uncoloured) nodes in blue, then the first colours one more node in red, the second k more in blue, and so on. The first player's goal is to colour four nodes forming the vertices of a square with sides parallel to the lines of the lattice. Can the second player prevent him from doing this a) when $k=1$; b)* when $k=2$; c)** for some $k>1$?

D. G. Azov

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the every first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than August 31 st, 1983 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover,

in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write **NEW PROBLEM IN PHYSICS** (or **MATHEMATICS**).

M809. Find the sum

$$1 + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n-1}{n!}$$

(here $k!$ denotes the product $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$).

V. V. Proizvolov

M810*. Prove that any convex polygon contains a rectangle whose area is no less than $1/4$ the area of the polygon.

F. B. Vainstein

P818. Two rigid rods each of length l are linked by a hinge at point A (see figure Рис. 1). The rod BA is fixed at point B , while point C slides along the directing line BC . The rod BA begins to rotate with constant angular velocity ω around B in the plane of the figure. What maximal velocity and acceleration will C reach if the rods are in line with BC ($\angle BAC = \pi$) at the initial moment?

L. G. Marcovitch

P819. Three small solids, whose mass ratio is 3:4:5 (the mass of the lightest is m) are held at three distinct points on the inside of a smooth half-sphere, fixed in its lowest point to a horizontal surface. At some moment the solids are freed. What maximal amount of heat can be irradiated by this system? For what initial position of the solids will this occur? All collisions are absolutely non-elastic.

S. K. Strokov

P820. The process $A-B-C-A$ takes place for one mole of ideal monoatomic gas P (see figure Рис. 2). Find the efficiency of the cycle.

A. G. Isergin, Ju. P. Malishev, V. R. Saufli

P821. In the circuit shown on figure Рис. 3, the transformer is ideal. The parameters of the components are shown on the figure. Find the amplitude of the current and the phase shift in the primary circuit.

R. Z. Alexandrov

P822. You are talking to a person sitting opposite who wears glasses. Can you determine if he is nearsighted or farsighted? (Naturally, you neither want to ask the person to let you try on his glasses nor talk about his defective eye-sight.)

M. V. Semenov

Решения задач

M791, M792, M794, M795; Ф803—Ф807

M791. Петя подарили микрокалькулятор, на котором можно выполнять следующие операции: по любым данным числам x и y вычислить $x+y$, $x-y$, $x+1$ и $1/x$ (при $x \neq 0$). Петя утверждает, что с помощью своего микрокалькулятора он может:

а) возвести любое число в квадрат, проделав не более шести операций;

а) Приведем схему возведения любого числа x ($x \neq 0$) в квадрат за 6 операций. Промежуточные результаты будем обозначать x_1, x_2, \dots, x_6 ($x_6 = x^2$); разумеется, их можно запоминать и неоднократно использовать в последующих вычислениях. Итак, надо последовательно вычислить: $x_1 = 1/x, x_2 = x + 1, x_3 = 1/x_2 = 1/(x + 1), x_4 = x_1 - x_3 = 1/x - 1/(x + 1) = 1/(x^2 + x), x_5 = 1/x_4 = x^2 + x, x_6 = x_5 - x = x^2$.

б) Пусть надо перемножить числа x и y . Вычисления проводим в следующем порядке: сначала найдем $x+y$ и $x-y$ (2 операции), затем возведем эти числа в квадрат, как в пункте а) (еще 12 операций), затем вычисляем

б)* *перемножить любые два числа, проделав не более двадцати операций. Как он это делает?*

$z = (x+y)^2 - (x-y)^2$ и $1/z = 1/4xy$ (2 операции), потом — последовательным сложением — $2/4xy = 1/4xy + 1/4xy$, $3/4xy = 2/4xy + 1/4xy$ и $1/xy = 3/4xy + 1/4xy$ (3 операции) и, наконец, $1/(1/xy) = xy$. Итого нам потребовалось $2 + 12 + 2 + 3 + 1 = 20$ операций.

С. В. Гашков

M792. *Решите в натуральных числах уравнения*

а) $3^x + 1 = 2y$;

б) $3^x - 1 = 2y$;

в)* *Найдите все натуральные n , при которых оба числа*

$\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n+1}$ *выражаются конечными десятичными дробями.*

г)* *Докажите, что при любом простом $p > 3$ и натуральном $m > 1$ ни одно из чисел $p^m + 1$ и $p^m - 1$ не может быть степенью двойки.*

а), б) Приасдем ответы к первым двум пунктам задачи: а) $x=1$, $y=2$; б) $x=1$, $y=1$ или $x=2$, $y=3$. Легко проверить, что эти числа удовлетворяют соответствующим уравнениям, а в пункте г) мы покажем, что других решений нет.

в) Ответ: $n=4$. Если $1/n$ — конечная десятичная дробь, то $1/n = m/10^s$, где m и s — натуральные числа, следовательно, 10^s делится нацело на n , то есть $n = 2^a \cdot 5^b$ и аналогично $n+1 = 2^c \cdot 5^d$, где a, b, c, d — целые неотрицательные числа. Отсюда получаем равенство $2^a \cdot 5^b + 1 = 2^c \cdot 5^d$, которое, очевидно, может выполняться только при $a=0$, $d=0$ или $b=0$, $c=0$; в первом случае $5^b + 1 = 2^c$, во втором — $5^d - 1 = 2^c$. В пункте г) мы покажем, что уравнение $5^x \pm 1 = 2^y$ при $x > 1$ решений не имеет. Остается заметить, что $5+1 \neq 2^y$, а $5-1 = 2^2$, откуда $a=2$, $b=0$ и $n=4$.

г) Мы должны доказать, что числа $p^m + 1$ и $p^m - 1$ имеют хотя бы по одному нечетному делителю (большому единицы).

Пусть m четно, $m=2n$. Поскольку p — простое число и $p > 3$, $p^n = 2s+1$, где $s > 1$. Следовательно, $p^m = (p^n)^2 = 4s^2 + 4s + 1$ и $p^m + 1 = 2(2s^2 + 2s + 1)$, а $p^m - 1 = 4s(s+1)$. Но число $2s^2 + 2s + 1$ и одно из чисел s и $s+1$ нечетные, что нам и требовалось.

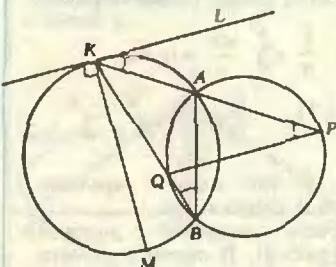
Пусть m нечетно. Тогда $p^m - 1 = (p-1)(p^{m-1} + p^{m-2} + \dots + 1)$, а $p^m + 1 = (p+1)(p^{m-1} - p^{m-2} + \dots + 1)$. Вторые сомножители в этих двух разложениях являются суммами нечетного числа нечетных слагаемых, и поэтому нечетны.

Легко видеть, что эти рассуждения годятся и для всех чисел вида $3^m \pm 1$ ($m > 1$), за исключением $3^2 - 1 = 2^2$. Отсюда следует, что уравнения пунктов а) и б) не имеют решений, отличных от выписанных нами выше.

Заметим еще, что фактически мы доказали утверждение г) для всех нечетных (не обязательно простых) $p > 3$.

С. Н. Бичков, В. В. Прасолов, Л. Д. Курляндчик

M794. *Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку K первой окружности проводятся прямые KA и KB , пересекающие вторую окружность в точках P и Q . Докажите, что хорда PQ второй окружности перпендикулярна диаметру KM первой окружности.*



M795. *Обозначим через $\sigma(n)$ сумму всех делителей натурального числа n . Докажите,*

Очевидно, достаточно доказать, что прямая PQ параллельна касательной KL к первой окружности. Имеем (см. рисунок):

$$\widehat{LKA} = \frac{1}{2} \widehat{KA} = \widehat{KBA} = \frac{1}{2} \widehat{AQ} = \widehat{QPA},$$

а из равенства величин углов LKP и KPQ вытекает, что $KL \parallel PQ$. (Мы воспользовались тем, что величина вписанного угла, а также угла между касательной и хордой с вершиной на окружности равна половине величины заключенной внутри угла дуги.)

У нас на рисунке (и в доказательстве) точка Q лежит на отрезке KB . Если она лежит на продолжении отрезка за точку B , рассуждение нужно слегка изменить. Это мы оставляем читателю.

Отметим еще, что доказанная теорема равносильна предельному случаю такого утверждения: если прямые a и b , проходящие, соответственно, через точки A и B пересечения двух окружностей, пересекают первую окружность в точках A_1 и B_1 , а вторую — в точках A_2 и B_2 , то $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

А. П. Иванченко

Решение основано на следующем совершенно очевидном замечании: если d — делитель числа n , то $d = n/d'$, где d' — также некоторый делитель n , поэтому сумму всех

что существует бесконечно много n таких, что
 а) $\sigma(n) > 2n$; б) $\sigma(n) > 3n$.
 Докажите, что для любого n
 в)* $\sigma(n) < n(\log_2 n + 2)$;
 г) $\sigma(n) < n(\ln n + 1)$.

делителей можно записать в виде

$$\sigma(n) = \frac{n}{d_1} + \frac{n}{d_2} + \dots + \frac{n}{d_s} = n \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_s} \right), \quad (1)$$

где d_1, \dots, d_s — это все делители числа n . Таким образом, величина $\sigma(n)/n$ равна сумме нескольких чисел из конечной последовательности $1, 1/2, \dots, 1/n$ и она будет тем больше, чем больше в эту сумму войдет чисел с небольшими знаменателями.

а) Докажем, что $\sigma(n) > 2n$ для любого $n = 6k$, где $k > 1$ (таких чисел, разумеется, бесконечно много). Поскольку n делится на 1, 2, 3, 6 и k , из (1) получаем

$$\sigma(n) > n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{k} \right) > 2n.$$

б) Пусть n — любое число, кратное произведению $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 16 = 16!$. Тогда n делится на все натуральные числа от 1 до 16 (этих делителей нам уже хватит) и в силу (1)

$$\begin{aligned} \sigma(n) &> n \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} \right) \right) > \\ &> n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \frac{1}{16} \cdot 8 \right) = 3n. \end{aligned}$$

Аналогично можно доказать, что при любом a неравенство $\sigma(n) > an$ выполняется для бесконечного множества чисел n . Заметим еще, что, как показывает более точная оценка, в нашем доказательстве для $a = 3$ делитель 16! можно заметить на 7!

в) Из формулы (1) вытекает, что

$$\sigma(n) < n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right). \quad (2)$$

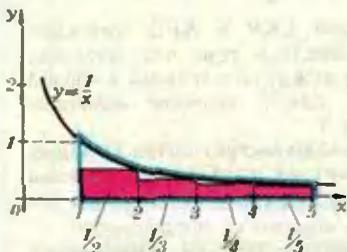
Оценим сумму в правой части. Пусть $2^k < n < 2^{k+1}$, тогда $k < \log_2 n$ и $1 + \dots + \frac{1}{n} < 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}-1} \right) + \frac{1}{2^{k+1}} < 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \dots + \frac{1}{2^k} \cdot 2^k + 1 = k + 2$, то есть $\sigma(n) < n \cdot (k + 2) < n(\log_2 n + 2)$.

г) Оценим сумму $\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ в неравенстве (2) иначе, чем в пункте в) — с помощью интеграла. Каждое слагаемое $1/k$ в ней можно представить как площадь прямоугольника, основанием которого является отрезок $[k-1; k]$ оси Ox (см. рисунок), причем этот прямоугольник расположен под гиперболой $y = 1/x$. Поэтому суммарная площадь всех прямоугольников для $k = 2, \dots, n$ меньше площади криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $y = 1/x$, осью Ox и прямыми $x = 1$ и $x = n$. Таким образом,

$$\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n,$$

и, следовательно, $\sigma(n) < n(\ln n + 1)$.

В. Ф. Лев



Ф803. Человек поднимается в гору с углом подъема α с постоянной скоростью \vec{v}_0 и тянет за собой на легкой веревке длины l сани массы m , находящиеся на горизонтальном участке (рис. 1).

Рассмотрим движение саней в тот момент времени, когда веревка составляет угол α с горизонтом.

В неподвижной системе отсчета, связанной с дорогой, сани движутся поступательно (рис. 2). В системе отсчета, движущейся со скоростью \vec{v}_0 , сани движутся по окружности радиуса l (рис. 3). Пусть скорости саней в этих системах в данный момент равны соответственно \vec{v} и \vec{v}_1 . Тогда

Найти натяжение веревки в тот момент, когда она составляет угол α с горизонтальной поверхностью. Силой трения саней о поверхность дороги пренебречь.

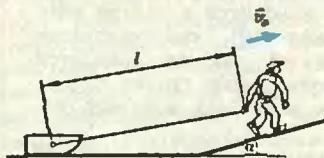


Рис. 1.

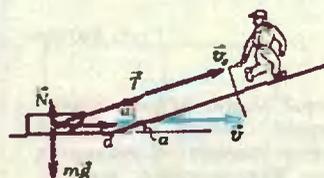


Рис. 2.

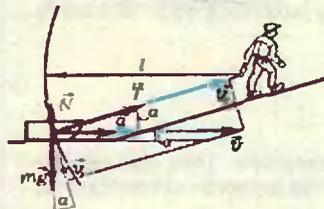
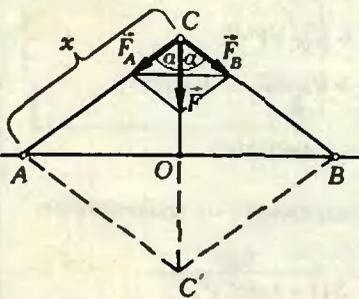


Рис. 3.

804. Две одинаковые звезды A и B вращаются под действием взаимного притяжения на неизменном расстоянии R друг от друга. На некотором неизвестном расстоянии x от звезд в плоскости их орбит движется легкая планета C , причем $|AC| = |BC| = x$, а треугольник ABC сохраняет свои размеры. Найти расстояние x .



$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_0, \text{ и}$$

$$|\vec{v}_1| \equiv v_1 = v_0 \operatorname{tg} \alpha. \quad (1)$$

Запишем уравнения движения саней. В неподвижной системе отсчета в проекциях на вертикальное направление (см. рис. 2)

$$T \sin \alpha + N - mg = 0 \quad (2)$$

(T — сила натяжения веревки, N — сила нормальной реакции со стороны дороги). В системе отсчета, движущейся со скоростью \vec{v}_0 , в проекциях на направление веревки (см. рис. 3)

$$T + N \sin \alpha - mg \sin \alpha = m v_1^2 / l. \quad (3)$$

Решая совместно уравнения (2) и (3) с учетом равенства (1), находим T :

$$T = m \frac{v_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{l \cos^2 \alpha}.$$

Задачу можно решить короче, если заметить, что ускорение саней \vec{a} во всех инерциальных системах отсчета одно и то же. Поэтому центростремительное ускорение саней в системе, движущейся со скоростью \vec{v}_0 , равно по модулю проекции ускорения \vec{a} на направление веревки:

$$\frac{v_1^2}{l} = \frac{v_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{l} = a \cos \alpha.$$

Отсюда находим a :

$$a = \frac{v_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{l \cos \alpha}.$$

Из уравнения движения саней в неподвижной системе отсчета в проекциях на горизонтальное направление (на направление \vec{a}) —

$$T \cos \alpha - ma = m \frac{v_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{l \cos \alpha}$$

— находим T :

$$T = m \frac{v_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{l \cos^2 \alpha}.$$

В. И. Чивилёв

Звезды A и B вращаются вокруг их центра масс, который находится в середине отрезка AB (в точке O). Центростремительное ускорение звезд сообщают силы их взаимного притяжения друг к другу:

$$M \frac{R}{2} \omega^2 = G \frac{M^2}{R^2}.$$

Отсюда угловая скорость вращения звезд равна

$$\omega = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

По условию задачи треугольник ABC , в вершинах которого находятся звезды и планета, сохраняет свои размеры. Это возможно в том случае, когда планета движется по окружности с центром в точке O (см. рисунок) с угловой скоростью ω . Центростремительное ускорение планете сообщают силы притяжения ее к звездам:

$$m \vec{a}_c = \vec{F}_A + \vec{F}_B,$$

где $|\vec{F}_A| = |\vec{F}_B| = G \frac{mM}{x^2}$. Как видно из рисунка,

$$|\vec{F}| = |\vec{F}_A + \vec{F}_B| = 2|\vec{F}_A| \cos \alpha =$$

$$= 2|\vec{F}_A| \cdot \frac{|CO|}{x} = 2G \frac{mM}{x^3} \cdot |CO|.$$

Таким образом,

$$m\omega^2 \cdot |CO| = 2G \frac{mM}{x^3} \cdot |CO|, \text{ или}$$

$$m \frac{2GM}{R^3} \cdot |CO| = m \frac{2GM}{x^3} \cdot |CO|.$$

Это равенство выполняется либо при $|CO|=0$, либо при $x=R$. В первом случае планета находится в центре масс звезд — в точке O (треугольник ABC «вырождается» в отрезок AB). Во втором случае планета находится в вершине равностороннего треугольника (точка C или C' на рисунке), в двух других вершинах которого находятся звезды.

Замечательно, что и при различных массах звезд A и B «положениями равновесия» окажутся вершины C или C' равностороннего треугольника (этот факт вы можете проверить самостоятельно; но выкладки будут достаточно громоздкими).

Г. Л. Коткин

Ф805. Через плоский конденсатор, заполненный диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ и удельным сопротивлением ρ , течет переменный ток $i(t) = I_0 \cos \omega t$. Определить амплитуду напряжения на конденсаторе. Расстояние между пластинами d , площадь каждой пластины S .

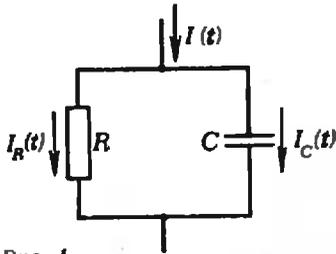


Рис. 1.

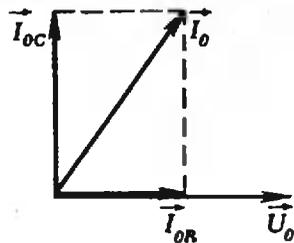


Рис. 2.

Как и все реальные конденсаторы, данный конденсатор может быть заменен эквивалентной схемой, показанной на рисунке 1. В этой схеме сопротивление R резистора равно омическому сопротивлению конденсатора, которое связано с наличием проводимости среды, заполняющей пространство между пластинами конденсатора. В нашем случае

$$R = \rho \frac{d}{S}.$$

Емкость C «идеального» конденсатора (без омического сопротивления) равна емкости реального конденсатора, то есть

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}.$$

Ток $I(t)$, текущий через реальный конденсатор, равен сумме тока $I_R(t)$, текущего через резистор, и тока $I_C(t)$, текущего через идеальный конденсатор.

Все эти три тока сдвинуты по фазе друг относительно друга. Построим векторную диаграмму амплитудных значений токов в цепи и напряжения. Отложим по горизонтали в виде вектора \vec{I}_{OR} амплитуду тока $I_R(t)$ (рис. 2). Ток и напряжение на резисторе совпадают по фазе. Поэтому вектор \vec{U}_0 амплитуды напряжения на резисторе, а следовательно, и на реальном конденсаторе, совпадает по направлению с вектором \vec{I}_{OR} . Учитывая, что напряжение на конденсаторе отстает от тока по фазе на $\pi/2$, отложим вектор амплитуды тока \vec{I}_{OC} по вертикали.

Из диаграммы видно, что амплитуда I_0 тока, текущего через реальный конденсатор, равна

$$|I_0| = (|I_{OR}|^2 + |I_{OC}|^2)^{1/2}.$$

Учитывая, что $I_{OR} = U_0/R$, $I_{OC} = U_0 \omega C$, получаем

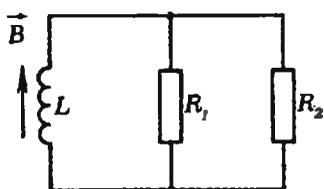
$$|I_0| = \frac{|U_0|}{R} (1 + (\omega RC)^2)^{1/2}.$$

Отсюда находим амплитуду напряжения на конденсаторе:

$$U_0 = \frac{I_0 R}{(1 + (\omega RC)^2)^{1/2}} = \frac{I_0 \rho d}{S(1 + (\omega RC)^2)^{1/2}}.$$

В. В. Можжев

Ф806. В схеме, показанной на рисунке, сразу после выключения внешнего магнитного поля, в котором находилась катушка с индуктивностью L , через резистор с сопротивлением R_1 течет ток I . Пренебрегая омическим сопротивлением катушки, определить, какое количество тепла выделяется на резисторе с сопротивлением R_1 и на резисторе с сопротивлением R_2 . Магнитное поле было направлено перпендикулярно плоскости витков катушки.



За время изменения внешнего магнитного поля в контуре будет действовать ЭДС индукции, которая вызвана, с одной стороны, изменением потока магнитной индукции внешнего магнитного поля, а с другой стороны — изменением потока магнитной индукции собственного магнитного поля катушки (ЭДС самоиндукции).

При параллельном соединении резисторов R_1 и R_2 в любой момент времени связь между токами, протекающими через резисторы, будет иметь вид $I_1(t) \cdot R_1 = I_2(t) \cdot R_2$. Следовательно, сразу после выключения внешнего поля ток через резистор R_2 равен

$$I_2 = I R_1 / R_2.$$

Ток I_L , протекающий через катушку сразу после выключения внешнего магнитного поля, равен

$$I_L = I + I_2 = I \frac{R_1 + R_2}{R_2}.$$

После выключения поля система изолирована. В первый момент вся энергия системы сосредоточена в магнитном поле катушки:

$$W = \frac{L I_L^2}{2} = \frac{L I^2}{2} \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_2^2}.$$

В дальнейшем эта энергия будет выделяться в виде тепла на резисторах. Поскольку падения напряжения на резисторах будут все время одинаковы, количества теплоты, выделившиеся на резисторах, будут обратно пропорциональны их сопротивлениям:

$$Q_1 \sim 1/R_1, \quad Q_2 \sim 1/R_2.$$

Решая систему уравнений

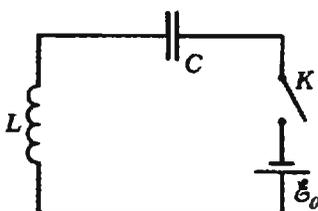
$$\begin{cases} Q_1 + Q_2 = \frac{L I^2}{2} \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_2^2}, \\ Q_1 / Q_2 = R_2 / R_1, \end{cases}$$

получим

$$Q_1 = \frac{L I^2}{2} \frac{(R_1 + R_2)}{R_2}, \quad Q_2 = \frac{L I^2}{2} \frac{(R_1 + R_2) R_1}{R_2^2}.$$

В. В. Можжев

Ф807. Последовательно с катушкой индуктивности L и конденсатором емкости C через ключ K подключили батарею с постоянной ЭДС \mathcal{E}_0 . В начальный момент времени ключ K разомкнут, конденсатор не заряжен. Определить максимальную величину тока в цепи после замыкания ключа. Омическим сопротивлением в цепи пренебречь.



После замыкания ключа конденсатор начнет заряжаться. Ток в цепи будет нарастать до тех пор, пока напряжение на конденсаторе не станет равным \mathcal{E}_0 . Следовательно, заряд, прошедший по цепи за время зарядки конденсатора, равен

$$q_0 = \mathcal{E}_0 C,$$

и ток за это время нарастает до максимального значения I_{\max} . Работа, совершенная источником за это время, равна

$$A = \mathcal{E}_0 q_0.$$

Эта работа равна сумме энергии, запасенной в конденсаторе за время зарядки, и энергии тока в катушке:

$$\mathcal{E}_0 q_0 = \frac{q_0^2}{2C} + L \frac{I_{\max}^2}{2}.$$

Подставив в это выражение значение $q_0 = \mathcal{E}_0 C$, найдем I_{\max} :

$$I_{\max} = \mathcal{E}_0 \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М761—М775 и Ф768—Ф787, справились с задачами М761—М764, М766, М769, М771, М773 и Ф768, Ф776, Ф779, Ф780, Ф782, Ф787. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

В. Арабидзе (Тбилиси) 70; *Ю. Баркаган* (Пенза) 72, 75; *С. Бахрюков* (Сумгаит) 72; *А. Беренштейн* (Москва) 70; *А. Биргер* (Иваново) 67, 72, 75; *И. Богуславский* (Москва) 67, 68, 72, 74, 75; *О. Бойко* (п. Кузьмолковский Ленинградской обл.) 72; *В. Булавас* (Паневежис) 67, 68, 70, 72, 75; *С. Велеско* (Минск) 67; *Г. Виннер* (Свердловск) 67; *М. Гаджибабаев* (Махачкала) 67; *Г. Гальминас* (Таураге) 67, 72; *М. Гаряев* (Физули) 67, 68, 70; *О. Гарифуллин* (Пенза) 67, 70, 72, 75; *А. Гасников* (Пенза) 72, 74; *Д. Гелев* (София, НРБ) 65; *Д. Глек* (Воронеж) 72; *Г. Гочев* (Дубна) 72; *А. Громов* (Ленинград) 72, 74; *А. Добрин* (Киев) 65; *О. Ерошкин* (Днепропетровск) 75; *А. Зейфман* (Вологда) 74; *К. Зыков* (Москва) 67, 68, 74; *В. Иалева* (Джеджизган) 72; *М. Йотов* (София, НРБ) 72, 75; *Д. Каледин* (Москва) 70, 72; *Д. Карасик* (Баку) 67, 68; *Н. Карпенко* (Ленинград) 72; *И. Карпов* (Казань) 72; *А. Карлович* (Киев) 67, 68, 72, 75; *А. Карташев* (Витебск) 72, 75; *В. Кацман* (Ленинград) 72, 75; *М. Каша* (Москва) 72; *Е. Ковальчук* (Киев) 72; *М. Коган* (Донецк) 72; *А. Корнилов* (Ростов-на-Дону) 72; *Д. Коршунов* (Новосибирск) 67, 68, 70, 74; *В. Кудряшов* (Пенза) 72, 75; *А. Куширенко* (Киев) 67; *О. Леонтьева* (Ленинград) 65, 67, 68, 70, 72; *А. Манита* (Бар) 72; *М. Маринов* (Ямбол, НРБ) 72; *А. Маслов* (Москва) 68, 74; *Р. Мисявичюс* (д. Повилаускай Лит. ССР) 72; *И. Михайлов* (София, НРБ) 65; *А. Молотков* (Ленинград) 67, 72, 75; *Ф. Назаров* (Ленинград) 72, 74; *Л. Наймарк* (Ленинград) 72; *Р. Нестеров* (В. Тырново, НРБ) 67, 70; *А. Никольцев* (Севастополь) 67, 70, 72, 74; *В. Новиков* (Коммунарск) 70; *А. Новожилова* (Цимлянск) 72; *О. Огурцова* (Ленинград) 72; *С. Павлов* (Ленинград) 70; *А. Перцовский* (Москва) 72; *В. Петров* (Пловдив, НРБ) 67, 68, 70, 72; *Д. Подкопаев* (Винница) 72; *С. Портнов* (Ленинград) 67; *Ю. Рубенко* (Киев) 72, 74; *Е. Рычков* (Красноярск) 72; *В. Сабадат* (Киев) 70; *Г. Самадашвили* (Тбилиси) 67, 68; *И. Сандлер* (Москва) 72; *А. Свиридов* (Москва) 68, 70; *И. Степанов* (Ленинград) 68, 72; *С. Струков* (Воронеж) 67, 70, 72, 74; *Г. Сукоян* (Москва) 72; *Ю. Таранников* (Новосибирск) 68, 72, 75; *А. Тепляев* (Ленинград) 67, 72; *С. Типцов* (Киев) 75; *А. Трухан* (Минск) 72; *О. Фатьянов* (Курск) 72; *Н. Федин* (Омск) 70; *Г. Фомин* (Алма-Ата) 72; *С. Хосид* (Алма-Ата) 72; *В. Хрычков* (Севастополь) 67, 68, 70, 72, 74; *С. Цонев* (София, НРБ)

72, 75; *Е. Шульман* (Вологда) 72; *У. Эммус* (Валга) 67, 75; *Л. Эрдеш* (Будапешт, ВНР) 67, 68, 70, 72, 74, 75; *П. Этингоф* (Киев) 67, 68, 72, 74; *А. Юдаев* (Москва) 68; *С. Юровский* (Мытищи) 68, 70.

Физика

А. Абанов (Красноярск) 84, 85; *Е. Антонян* (Ереван) 82, 83, 85; *А. Бабаян* (Москва) 73—75, 85; *Э. Багдасарян* (Баку) 73, 74, 77, 78, 81, 85; *В. Барabanов* (Киев) 69, 84; *Н. Барановская* (Винница) 84, 85; *В. Базрыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) 83—85; *С. Бережной* (Кривой Рог) 73—75, 77; *Е. Беспалов* (Курган) 84, 85; *О. Богучаров* (Тула) 83, 85; *Ю. Бриль* (Днепропетровск) 75, 85; *В. Булавас* (Паневежис) 69, 75, 78, 84, 85; *И. Бушцев* (Кемерово) 83—86; *О. Важеевский* (Москва) 81, 85; *В. Вангелов* (Бурнас, НРБ) 83, 85; *М. Верховодов* (Киев) 69, 74, 77, 83, 84; *И. Гайович* (Киев) 69—71, 75; *Б. Галицкий* (Москва) 84, 85; *М. Главач* (Пинглава, ЧССР) 75; *С. Гребенщиков* (п. Черноголовка Московской обл.) 69, 70, 75; *О. Гришин* (Тула) 74, 75, 81, 84; *А. Данейко* (Минск) 75; *Г. Дanelia* (Тбилиси) 69, 84, 85; *А. Дворский* (Киев) 84; *А. Дмитриев* (Куйбышев) 78; *Л. Доросинский* (п. Черноголовка Московской обл.) 69, 71—75; *А. Дуняевский* (Киев) 69, 73—75, 77, 78, 84, 85; *М. Дьячков* (п. Черноголовка Московской обл.) 69, 71—75; *А. Евтушенко* (Мытищи) 78; *С. Ефимов* (Баку) 69—71, 74, 75, 84, 85; *Д. Жакбарова* (Учкурган) 74; *А. Жиленко* (Киев) 73; *В. Житомирский* (Харьков) 68—75, 78, 81, 83—85; *Р. Жямайтис* (Вильнюс) 73—75, 78, 81, 83—85; *А. Зайцев* (Брежнев) 77, 78; *Д. Зайцев* (Горький) 73, 74, 83—85; *М. Заславский* (Харьков) 69; *Ю. Зевеинцев* (Харьков) 70, 74, 84, 85; *М. Зиманов* (Алма-Ата) 74, 83—85; *Е. Иошпе* (Киев) 84, 85; *Б. Иричанин* (Белград, СФРЮ) 69—73, 75, 77, 83, 84; *Т. Калатози* (Кутанси) 85; *Д. Каледин* (Москва) 69, 71, 75, 81, 83—86; *И. Калиновский* (Киев) 71, 73—75; *Е. Кацмивер* (Таллин) 75; *А. Карнаухов* (Ижевск) 75, 77; *С. Кастелли* (Болград) 71, 73—75, 78, 85; *М. Каша* (Москва) 84; *Ю. Кившарь* (Харьков) 74, 75, 84—86; *В. Кидысюк* (Рязань) 69—72; *М. Коваль* (Киев) 84; *В. Комов* (Александров) 71—75, 83, 84, 86; *К. Кондратец* (Киев) 69; *Е. Корнилова* (Ефремов) 69; *Л. Король* (Киев) 83, 84; *А. Корчагин* (Красноармейск Московской обл.) 69—71, 73—75, 77, 78, 81, 84, 85; *Н. Косматов* (Москва) 84; *Д. Кравчук* (Киев) 73; *С. Кравчук* (Киев) 69, 85; *А. Крапивин* (Киев) 83—85; *В. Крыман* (Винница) 71, 74, 75, 84, 85; *В. Кубатин* (Ленинград) 84; *Д. Купцов* (Москва) 69, 74, 75, 83—86; *Н. Кухаркин* (Москва) 74, 75, 85; *Г. Ландсберг* (п. Протвино Московской обл.) 69, 75, 78, 81—86; *А. Латыпов* (Уфа) 78; *И. Линишиц* (Винница) 74, 75, 83—85; *С. Лиханский* (Херсон) 78; *О. Лопин* (Фрунзе) 69, 70, 73, 75, 78; *С. Люлькович* (Брест) 77; *Б. Мадрахимов* (колх. Хамза Хорезмской обл.) 73; *Г. Мазманиди* (Чинкент) 69, 70; *Д. Макаров* (п. Черноголовка Московской обл.) 73—75, 81, 83—85; *К. Макачук* (Киев) 69, 74, 75, 78, 84, 85; *К. Макогон* (Запорожье)

(Окончание см. на с. 61)

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ



Из научного фольклора

Двое на воздушном шаре пролетают и незнакомом месте.

Послушайте! кричат они случайному прохожему. Где мы находимся?

Тот внимательно смотрит на них и кричит в ответ:

Вы находитесь на воздушном шаре!

Наверное, это математик, говорит один аэронавт другому.

С чего ты это взял?

Во-первых, он подумал. Во-вторых, он абсолютно прав. И, в-третьих, совершенно непонятно, как его ответ вообще можно использовать.

Задача-шутка

Об этой задаче аспиранты физики МГУ узнали от аспирантов-математиков года три назад, более точно автора задачи установить не удалось. Похоже, что она специально создана для специалистов по теории гравитации, но читателям «Кванта» тоже полезно попробовать на ней свои силы, особенно ученикам 4-5 классов.

Итак, задача:

Два человека пошли на балконе разных этажей многоэтажного здания, расположенные один над другим на одной вертикали. Одновременно (например, по радиосвязи) точного времени они кричат друг другу: «А».

Кто из них услышит крик партнера раньше — нижний или верхний? Для того чтобы собственный крик не мешал слышать, длительность звукового сигнала можно считать очень малой.

С. С. Хилькевич



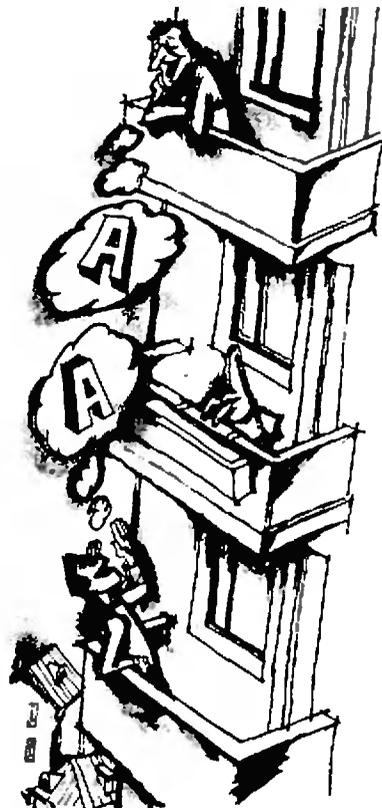
Фразы

Дуракам закон не писан... Так стоит ли набираться ума?

Действие равно противодействию... А бездействие?

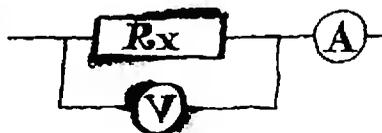
Я мыслю и на это я существую.

О. Джексон

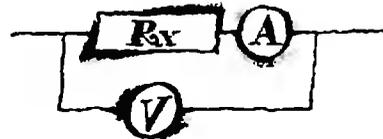


Маленькие хитрости

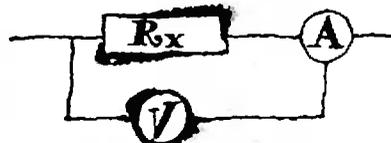
Если при измерении сопротивления резистора по схеме



измеренное значение меньше предположимого, а по схеме



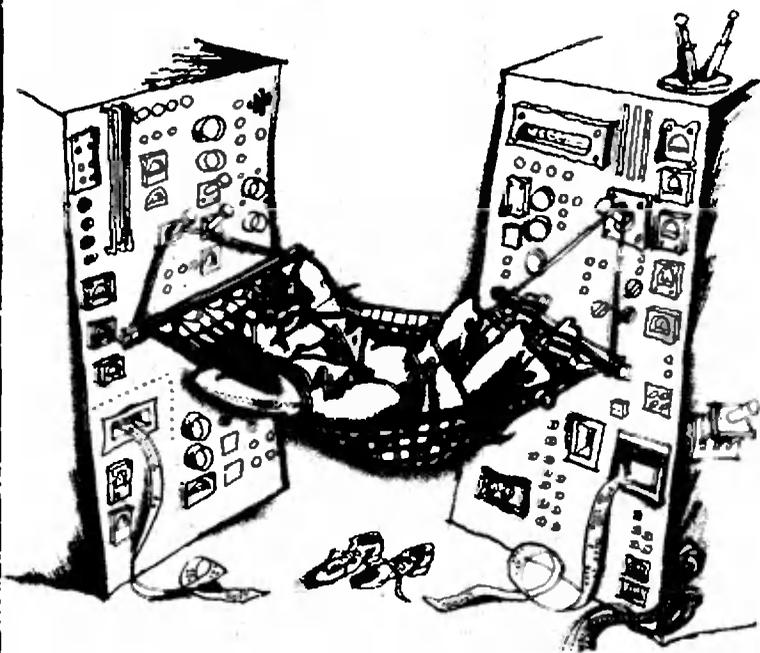
большее, то надо измерять по схеме



будет в самый раз

Г. А. Зайн

Рисунки В. М. Скрипачев





Задачи вступительных экзаменов по математике и физике в различные вузы в 1982 году

Предлагаем подборку задач вступительных экзаменов по математике и физике в 1982 году в 6 университетов (Воронежский, Горьковский, Киевский, Гартуский, Ташкентский и Уральский), 4 педагогических института (Казанский, Одесский, Омский и Ярославский) и 3 политехнических института (Кишиневский, Рижский и Томский), а также в Московский архитектурный институт.

Математика

Письменный экзамен

Алгебра

1. Смешали тридцатипроцентный раствор соляной кислоты с десятипроцентным и получили 600 г пятнадцатипроцентного раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

2. Человек удаляется от подножья башни высотой 60 м со скоростью 8 км/ч. Какова его скорость удаления от вершины башни в момент, когда он находится на расстоянии 80 м от ее основания? Движение происходит в горизонтальной плоскости.

3. Найдите x из пропорции

$$\frac{x \cdot 34 \frac{2}{5}}{0,4 + 8 \cdot \left(5 - 0,8 \cdot \frac{5}{8}\right) - 5 \cdot 2 \frac{1}{2}} = \frac{90}{1 \frac{7}{8} \cdot 8 - 8,9 + 2,6 : \frac{2}{3}}$$

4. Упростите

а) $\left(\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{5+\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{6}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;

б) $a^{\frac{1}{2}} - \frac{a-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}} + \frac{1+a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}} + \frac{2}{a^{\frac{3}{2}}}$.

5. Докажите, что значение выражения

$$\frac{\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^2 + \left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)^2}{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^{-1} \cdot \left(a+(ab)^{\frac{1}{2}}\right)} \cdot \frac{b-2\sqrt{ab}+a}{\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a})}$$

не зависит от значений a и b .

6. Упростите и прологарифмируйте выражение

$$x = \left[\frac{4\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{(1-\cos 2\alpha)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\cos \alpha \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)} \right]^{\frac{1}{5}}$$

7. Докажите, что

$$16 \sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ \cdot \sin 90^\circ = 1.$$

8. Докажите, что если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 - 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma.$$

9. Сумма тридцати начальных членов геометрической прогрессии в 72 раза меньше, чем сумма ее следующих шестидесяти членов. Найдите отношение пятидесятого члена прогрессии к десятому ее члену.

10. Решите уравнение

а) $\frac{2}{x} - \frac{1}{1-x} = 2$;

б) $\left(\frac{1}{8}\right)^x \cdot 4^{\frac{x^2}{2}-1} = 8^{-\frac{2}{3}x}$;

в) $\frac{2^{x^2} \cdot 5^{x^2} - 0,1^3 \cdot (10^{3-x})^2}{\sqrt{x+2}} = 0$;

г) $5 \cdot 4^x - 3 \cdot 10^x - 2 \cdot 25^x = 0$;

д) $1 - \lg(5x) = \lg(x-1)$;

е) $\log_2^2 x + 3 = 2 \log_2 x^2$;

ж) $5 \log_4 x + 3 \log_x 4 = 8$;

з) $\sin x(\sin x + \cos x) = 1$;

и) $\sin^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$;

к) $\cos^3 x + \cos^2 x - 4 \cos^2 \frac{x}{2} = 0$;

л) $\operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 3x - 2 \operatorname{tg} 2x = 0$;

м) $\sin 2x(2\sqrt{3} \sin x + 2 \cos x) + \sqrt{8} = -\cos 2x(2\sqrt{3} \cos x - 2 \sin x)$.

11. Найдите решения уравнения

$$\sin x - \cos x = \frac{3}{2},$$

которые удовлетворяют неравенству $|x| < 3$.

12. Для какого из корней уравнения

$$4 \cos x \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sqrt{3}$$

выражение $2x^2 + 4x - 3$ имеет наименьшее значение?

13. Найдите координаты точек пересечения графиков $y = \sin^2 x$ и $y = 1 + \cos x$ на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

14. При каких значениях a уравнение
 а) $|x^2 + 2ax| = 1$ имеет 3 различных корня?
 б) $a(x^2 - x + 1) = 3x + 5$ имеет 2 различных корня?

в) $\frac{a-1}{x+4} = \frac{2x+3}{x^2-x-20}$ имеет корень $x < 2$?

15. Решите систему
 а) $\begin{cases} \log_1(xy) + y + 2 = 0 \\ 3^{2+y} + 17 = \frac{18}{xy} \end{cases}$

б) $\begin{cases} 8 \cdot (\sqrt{2})^{x-y} = 0,5^{y-3} \\ \log_3(x-2y) + \log_3(3x+2y) = 3. \end{cases}$

16. Найдите числа x и y из равенства $2^x \vec{a} + y\vec{b} = 40 \cdot 5^y \vec{a} + (2-x)\vec{b}$,

где \vec{a} и \vec{b} — неколлинеарные векторы.

17. Решите неравенство

а) $\frac{|x-5|}{x+3} > 2$;

б) $\sqrt{x^2-4x-12} < x-1$;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4-2x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2x+4}$

г) $\frac{2^{4x} + 4x + 1 + 3}{2x-1-4^x} < 0$;

д) $2 \log_{\frac{1}{3}}(\log_2 x) > \log_{\frac{1}{3}}(6 - \log_2 x)$;

е) $\log_{x-1} \left(\frac{7}{4} - x\right) > 2$.

18. Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 16 \\ 3y - 6 < 0 \\ 2y + 6 > 0 \end{cases}$

б) $\begin{cases} -x + y + 1 > 0 \\ x + y - 2 < 0 \\ 2x + 8 > 0. \end{cases}$

19. При каких значениях параметра a решения неравенства

$$\sqrt{9-x^2} > -a^2 x$$

образуют промежуток длины $\frac{15}{4}$? Что это за промежутки?

20. Найдите область определения функции

а) $2^{3+\sqrt{x^2-25}} + \frac{x-4}{x-6}$;

б) $4x + \frac{1}{x\sqrt{x+1}} + \log_2(2-x)$;

в) $\log_{2x-3} \left(\frac{1-x}{x-3}\right)$;

г) $\frac{\lg \sin x}{\sqrt{15x-x^2-54}}$.

Анализ

1. Найдите $F''(0)$, если $F(x) = e^x \cdot \cos(x^2 + x)$.

2. Найдите уравнение касательной, проведенной к кривой $y = -x^2 + 2x - 1$ в точке

с абсциссой $x = 2$. Определите угол между этой касательной и прямой $y - x + 1 = 0$.

3. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $A(3; 2)$ и касающейся параболы $y = x^2 - 2x$.

4. Из точки x оси Ox проводятся 2 негоризонтальные касательные — к графику функции $f(x) = -x^3$ и к графику функции

$g(x) = \frac{2}{|x^2| + x^3}$. Для каких значений x угловой коэффициент первой касательной не меньше углового коэффициента второй касательной?

5. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $6 - 3x^2 + x^3$.

6. Докажите, что функция $-0,2x^5 + 0,5x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x^2 - x$ убывает на всей области определения.

7. Найдите критические точки функции $2 \sin \frac{x}{2} + \sin x + x + 3$.

8. Найдите точки максимума и точки минимума функции $2 \ln x + x \left(\frac{x}{2} - 3\right)$.

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5$ на отрезке $[-1; 1]$.

10. Движения первой и второй материальных точек вдоль одной прямой заданы, соответственно, уравнениями $s_1(t) = t^3 - 3t^2 + 3t + 2$ и $s_2(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2$.

Найдите наименьшую скорость первой точки в промежутке убывания скорости второй точки.

11. Опишите свойства функции $-2^x + 1$ и постройте ее график.

12. Исследуйте с помощью производной график функции $-x^4 + 2x^2$ и постройте ее график.

13. В плоскости xOy найдите треугольник ABC наименьшей площади, если $A(-3; 0)$, $B(3; 0)$ и вершина C лежит на графике функции $y = 3 + 5^2 + (1-x)^4$.

14. У прямоугольного треугольника ABC с прямым углом в вершине C $A(4; 0)$, $B(x_0; y_0)$ лежит на графике функции $y = x^3$, $1 < x_0 < 3$ и C лежит на оси Ox . Найдите абсциссу вершины B , при которой площадь треугольника будет наибольшей.

15. Из точки A окружности радиуса R проведены касательная и хорда AB . На касательной выбрана точка C так, что $|AB| = |BC|$. При каком значении \widehat{BAC} площадь треугольника ABC будет наибольшей?

16. К кривой $y = x^2 + bx + 2$ в точках $x_1 = -1$ и $x_2 = -3$ проведены касательные. При каком значении b периметр треугольника, образованного проведенными касательными и осью Oy , будет наименьшим?

17. Основанием прямой призмы является квадрат. Призма вписана в полушар так, что ее нижнее основание лежит в плоскости большого круга полушара, а вершины верхнего основания лежат на шаровой поверхности. Найдите величину наибольшего объема призмы, если объем полушара равен Q .

18. При каком значении двугранного угла при основании правильной четырехугольной пирамиды отношение площади поверхности сферы, вписанной в пирамиду, к площади боковой поверхности пирамиды будет наибольшим?

Геометрия

1. Стороны треугольника ABC разделены точками M, K, P так, что $|AM|:|MB| = |BK|:|KC| = |CP|:|PA| = 1:2$. Найдите площадь треугольника, ограниченного прямыми AK, BP и CM , если площадь треугольника ABC есть m .

2. Найдите угол треугольника, если известно, что стороны, заключающие этот угол, равны a и b , а биссектриса угла равна l .

3. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке D так, что $|AD|:|DB| = 3:1$. Найдите периметр треугольника, если длина высоты, опущенной из вершины прямого угла, равна 3 .

4. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна S . Пусть E — середина стороны AB , F — середина стороны BC , а P — точка пересечения отрезков EC и AF . Найдите площадь четырехугольника $BFPE$.

5. Около окружности описана трапеция, боковые стороны которой образуют с большей из параллельных сторон углы α и β . Определите радиус окружности, если площадь трапеции равна Q .

6. В окружности проведены радиусы OA, OB, OC . Найдите величину угла AOB , если $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$.

7. Плоские углы ASB, BSC, CSA тетраэдра $SABC$ равны $60^\circ, 60^\circ, 30^\circ$. Вычислите косинус угла между вектором \vec{SB} и вектором, направленным по биссектрисе угла ASC , если $|SA| = |SB| = |SC| = a$.

8. Четырехугольник $ABCD$ задан координатами вершин $A(-1; 2; 3), B(-1; 3; 1), C(-1; 7; 3), D(-1; 6; 5)$. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

9. Через сторону нижнего основания правильной треугольной призмы проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро в точке S и наклоненная к плоскости основания под углом α . Найдите площадь боковой поверхности образовавшейся при этом пирамиды с вершиной S , если длина стороны основания равна a .

10. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ребро которого равно a . Через диагональ AC его грани $ABCD$ проведена плоскость параллельно прямой BO_1 , где O_1 — центр грани $A_1 B_1 C_1 D_1$. Определите площадь образовавшегося сечения.

11. Ромб $ABCD$ со стороной длины a и углом $A = \alpha$ лежит в основании пирамиды $SABCD$, боковые грани которой наклонены к плоскости основания под углом β . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину A и точки M и N , которые делят ребра SB и SD в одном и том же отношении $2:1$, считая от точки S .

Устный экзамен

Алгебра

1. Найдите $\log_{24} 54$, если $\log_2 3 = a$.

2. Сравните значения выражений $\frac{1}{3} \lg 64 + \lg 0,25$ и $\lg 0,3$.

3. Расположите в порядке возрастания числа $\sin 3, \sin 1$ и $\sin 0$.

4. Вычислите без таблиц

а) $\cos \frac{191\pi}{3}$;

б) $16 \sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ \cdot \sin 90^\circ$;

в) $\operatorname{tg} \left(\arccos \frac{1}{2} + \arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)$.

5. Докажите тождество

а) $\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) - \sin \alpha \cdot \cos \alpha} - 2 \operatorname{tg}^2 \alpha = 0$;

б) $\cos^5 \alpha = \frac{5}{16} + \frac{15}{32} \cos 2\alpha + \frac{3}{16} \cos 4\alpha + \frac{1}{32} \cos 6\alpha$.

6. Произведение девяти начальных членов геометрической прогрессии равно $16\sqrt{2}$. Какой член геометрической прогрессии можно определить на основании этой информации? Чему он равен?

7. Решите уравнение

а) $|x^2 - x + 6| = x + 2$;

б) $1 + \sqrt{1 + x\sqrt{x^2 - 24}} = x$;

в) $\sqrt{8^{x-1}} = \sqrt[3]{4^{2-x}}$;

г) $2^{2x+2\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1} + \sqrt{x^2-2} = 6$;

д) $\log_3(3^x + 8) = 2 - x$;

е) $2 \lg \lg x = \lg(3 - 2 \lg x)$;

ж) $4^{\log_2(\lg x)} = \lg x - \lg^2 x + 1$;

з) $\log_3 x - 2 \log_1 x = 6$;

и) $3 \cdot 2^{\log_2(3x-2)} + 2 \cdot 3^{\log_2(3x-2)} - 5 \cdot 6^{\log_2(3x-2)} = 0$;

к) $\sin^2(\pi x) + \log_2^2(x^2 - 2x + 1) = 0$;

л) $\cos(5x) = \cos(5+x)$;

м) $\sin 3x \cdot \cos 3x = \sin 2x$;

н) $\sin \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{-x}}{2} \right)^2 = \sin \frac{x}{2}$;

о) $|\sin x| + |\cos x| = 1,4$;

п) $\sqrt{3} \cdot \sin x = \sqrt{2} + \sin x$;

р) $4^{\sin^2(\pi x)} + 3 \cdot 4^{\cos^2(\pi x)} = 8$;

с) $(a^2 - 1)x = a + 1$.

8. При каких значениях a уравнение $x^2 - 2(a-2)x + a^2 - 2a - 3 = 0$ имеет два различных положительных корня?

9. Решите систему

а) $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2xy-z^2=16 \end{cases}$

б) $\begin{cases} y^x = 1,5 + y^{-x} \\ y^{2,5+x} = 64 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^{\log_3 y} + 2y^{\log_3 x} = 27 \\ \log_3 y - \log_3 x = 1 \end{cases}$

10. Решите неравенство

а) $3 - \frac{2x-17}{x-5} > \frac{x-5}{x+2}$;

б) $|x^2 - 1| > 1 - x$;

в) $\sqrt{x^2 - 3x - 10} > x - 2$;

г) $\frac{1}{2x-1} > \frac{1}{1-2x-1}$;

д) $0,1^{\log_2 \left(\frac{2x-1}{x+3} \right)} < 10$;

е) $\log_x 17 > \log_x 11$;

ж) $\log_x \left(\frac{2x-1}{x-1} \right) > 1$;

з) $\sqrt{\lg \sin x} < x - 13\pi$;

и) $\frac{2x-1}{\log_2 x} < 0$;

к) $2 \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) < 1$;

л) $\sin x \cdot \cos x > 0$.

11. Изобразите на координатной плоскости множество решений

а) уравнения $|x| + x = |y| + y$;

б) неравенства $\log_{xy} y < 0$;

в) системы неравенств

$$\begin{cases} y-x < 0 \\ x+y > 0 \\ xy < 3. \end{cases}$$

12. При каких значениях параметра a множество решений неравенства

а) $x^2 + ax - 1 < 0$ будет интервалом длины 5?

б) $x^2 - ax - 6a < 0$ будет интервалом, длина которого превышает 5?

13. При каких значениях параметров a, b множество решений неравенства

$$\sqrt{x-a} > \sqrt{2x-b}$$

совпадает с промежутком $[1; 5]$?

14. При каких значениях параметра a имеет решения система неравенств

а) $\begin{cases} ax > -1 \\ x+a > 0 \end{cases}$?

б) $\begin{cases} x^2 - (a+1)x + a < 0 \\ x^2 + (a+3)x + 3a < 0 \end{cases}$?

15. Найдите область определения функции

а) $\frac{\sqrt{x-2} - \lg(5x)}{\lg(5-x)}$;

б) $\sqrt{\cos x}$;

в) $\arccos \frac{x+1}{x-2}$.

16. Найдите область значений функции $\sqrt{x-1} + \sqrt{12-2x}$.

17. Постройте график функции

а) $\sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{x^2-6x+9} + x$;

б) $\log_{0,5} |1-2x| + 2$;

в) $\log_2 \sin x$.

18. На прямой $y=2x+5$ и параболы $y=x^2+3x-1$ найдите точки, симметричные относительно оси Ox .

Анализ

1. Вычислите

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1}$$

2. Найдите производную функции $2 \sin(1,8x-3\pi) + \cos x \cdot \sin x$.

3. Найдите уравнение касательной к параболе $y=2x^2-6$ в точке с абсциссой $x=1$.

4. Найдите уравнения касательных к кривой $y=x^2-4x+3$, проходящих через точку $M(2; -5)$.

5. Найдите промежутки возрастания и убывания функции

а) $x + \frac{4}{x}$;

б) $\cos x - 2x$.

6. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 2 \cos x - \sin^2 x$ на отрезке $[0; 2\pi]$.

7. В прямоугольный треугольник с гипотенузой длины 32 см и углом 60° вписан прямоугольник, основание которого лежит на гипотенузе. Какова должна быть длина сторон прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

Геометрия

1. Катеты прямоугольного треугольника равны b и c . Найдите биссектрису прямого угла.

2. Две окружности касаются внешним образом. Через точку касания проведена секущая. Докажите, что отрезки этой секущей, заключенные внутри окружностей, относятся как радиусы.

3. В угол, равный α , вписаны две окружности, касающиеся друг друга. Найдите отношение их радиусов.

4. В полукруг вписаны две одинаковые окружности, касающиеся друг друга. Какой радиус имеют эти окружности, если радиус полукруга равен R ?

5. Две стороны треугольника равны a и b ($a > b$). В каких пределах может меняться

а) его периметр?

б) радиус описанной около него окружности?

6. Сторона треугольника равна a , противолежащий угол — α . В каких пределах может меняться его площадь?

7. Два конгруэнтных квадрата имеют общий центр. Стороны одного из них параллельны диагоналям другого. Вычислите площадь общей части этих квадратов, если площадь каждого из них равна S .

8. К окружности с центром O проведены две касательные, пересекающиеся в точке P . Разложите вектор \vec{PO} по \vec{PA} и \vec{PB} , если известно, что A и B — точки касания и $\angle APB = 120^\circ$.

9. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны и образуют попарно друг с другом углы $\frac{2\pi}{3}$. Разложите вектор \vec{a} по векторам \vec{b} и \vec{c} , если $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 1$.

10. Плоскость, параллельная основанию пирамиды, делит ее объем на две равные части. В каком отношении эта плоскость делит ее высоту?

11. Если в каждый из двух многогранников можно вписать шар, причем радиусы обоих шаров одинаковы, то объемы этих многогранников относятся так же, как площади их поверхностей. Почему?

Физика

Письменный экзамен

Вариант I

Выберите один или несколько правильных ответов на следующие вопросы.

1. Ускорение математического маятника минимально: а) при прохождении точки равновесия; б) в момент остановки в наивысшей точке; в) при приближении к точке равновесия.

2. Инертность тела характеризуется:
а) массой; б) весом; в) плотностью;
г) объемом.

3. Соотношение между температурой, выраженной по шкале Кельвина (T), и температурой, выраженной по шкале Цельсия (t), следующее: а) $t = T + 273$; б) $T = t + 273$; в) $T = 1/273 + t$; г) $t = 1/273 + T$.

4. Какая из перечисленных единиц является единицей удельной теплоемкости:
а) Н; б) К; в) Дж/кг; г) Дж/(кг · К);
д) Вт?

5. Как изменится показание амперметра при замыкании ключа (рис. 1):

- увеличится в 2 раза;
- уменьшится в 2 раза;
- увеличится в 4 раза;
- уменьшится в 4 раза;
- не изменится?

6. Работа трансформатора основана на:
а) законе Ома; б) законе Кулона; в) законе электромагнитной индукции; г) законе Джоуля — Ленца.

7. Через p - n переход протекает обратный ток, если: а) потенциал полупроводника p -типа положительный, n -типа отрицательный; б) потенциал полупроводника p -типа отрицательный, n -типа положительный.

8. При помощи собирающей линзы получаем мнимое изображение, если предмет находится: а) между фокусом и линзой; б) между линзой и двойным фокусным расстоянием; в) дальше, чем двойное фокусное расстояние.

9. Луч света переходит из воздуха в воду. Какому условию удовлетворяет угол преломления β , если угол падения равен α : а) $\beta > \alpha$; б) $\beta < \alpha$; в) $\beta = \alpha$?

10. Какое из перечисленных физических явлений используется в счетчике Гейгера — Мюллера: а) фотоэффект; б) ионизация атомов при столкновениях частиц; в) конденсация пересыщенного пара?

II

- Сформулируйте третий закон Ньютона.
- Что такое круговая частота?
- Сформулируйте законы фотоэффекта.
- Сформулируйте закон Джоуля — Ленца.
- Дайте определение единицы индуктивности — генри.
- Сформулируйте постулаты Бора.

III

1. Тело массой $m = 200$ г бросают вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 50$ м/с. Найдите потенциальную энергию тела в конце второй секунды.

2. На графике представлен процесс изотермического расширения идеального газа

(рис. 2). Запишите для данного процесса уравнение $p = p(V)$.

3. Напряжение в цепи изменяется по закону $u = 150 \sin \omega t$ (в единицах СИ). Какое количество теплоты выделится за $t = 5$ мин, если в цепь включили электрическую плиту сопротивлением $R = 50$ Ом?

4. Точечный источник света находится на глубине $h = 2$ м под водой. Найдите радиус круга на поверхности воды ($n = 1,33$), через который лучи света выходят в воздух?

Вариант 2

1. а) Кинетическая энергия, ее физический смысл.

б) Постулаты Бора.

а) Определите длину звуковой волны свистка локомотива если она соответствует частоте 600 колебаний в 1 секунду. Скорость звука $v = 330$ м/с.

2. Понятие о спектральном анализе. Инфракрасная и ультрафиолетовая части спектра. Спектры излучения и поглощения.

3. Электроннолучевая трубка.

4. Из одной точки над поверхностью Земли одновременно начинают двигаться два тела: одно вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 39,2$ м/с, другое — свободно падать. Через какое время расстояние между ними будет $l = 117,6$ м?

5. Какой длины необходим нихромовый провод для нагревателя, в котором за $t = 6$ мин можно нагреть $m = 400$ г воды от $t_1 = 10^\circ\text{C}$ до $t_2 = 100^\circ\text{C}$, если коэффициент полезного действия $\eta = 90\%$, а напряжение $U = 120$ В? Поперечное сечение провода $S = 0,1$ мм². Удельная теплоемкость воды $c = 4,19 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), удельное сопротивление нихрома $\rho = 1,1 \cdot 10^{-6}$ Ом · м.

Задачи устного экзамена

Механика

1. Под каким углом к горизонту следует бросить камень из точки А, сообщив ему скорость $v_0 = 2\sqrt{gl}$, чтобы камень упал в точке В (рис. 3)? Нарисуйте траекторию камня (сопротивлением воздуха пренебречь).

2. С вершины башни высотой $h = 125$ м, стоящей на экваторе, свободно падает тело. Определите отклонение точки падения тела к востоку (от вертикали), связанное с суточным вращением Земли ($T = 1$ суткам).

3. Две книги лежат горизонтально одна на другой. Если нижнюю книгу приподнять за край, то верхняя равномерно соскользнет с нижней при угле наклона к горизонту $\alpha = 30^\circ$. Чему равен коэффициент трения между книгами?

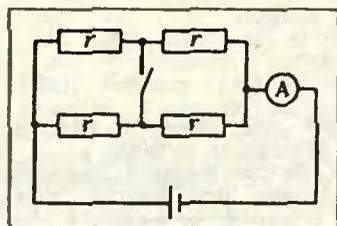


Рис. 1.

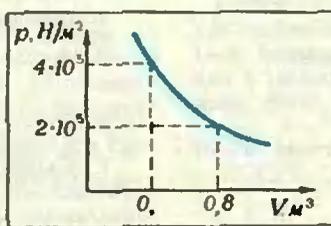


Рис. 2.

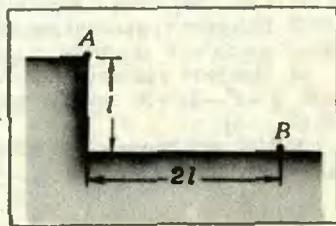


Рис. 3.

4. Два груза с массами m_1 и m_2 , соединенные нитью, движутся по гладкой плоскости. Когда сила $F=100$ Н была приложена к правому грузу массы m_2 , натяжение нити было равно $T=30$ Н. Каким будет натяжение нити, если эту силу приложить к левому грузу?

5. Однородная балка массой $m=60$ кг и длиной $l=4$ м опирается о гладкий пол и выступ B , находящийся на высоте $h=3$ м над полом (рис. 4). Балка образует угол $\alpha=30^\circ$ с вертикалью и удерживается веревкой AC , протянутой у самого пола. Вычислите натяжение веревки, реакцию пола и реакцию выступа B .

6. Прямоугольная трапеция вырезана из однородного листового материала. Основание трапеции в два раза больше ее высоты и верхнего основания, равного единичной длине. Определите графически положение центра масс трапеции.

7. Два пассажира одинаковой массы $m=70$ кг находятся на платформе, стоящей неподвижно на рельсах. Масса платформы $M=280$ кг. Каждый пассажир начинает бежать с одинаковой относительно платформы скоростью $u=6$ м/с. Какую скорость приобретет платформа, если они прыгнут в одну сторону одновременно и последовательно? А если в разные стороны?

8. Пуля, летящая со скоростью v_0 , пробивает несколько одинаковых досок, расположенных на некотором расстоянии друг от друга. В какой по счету доске пуля застрянет, если ее скорость после прохождения первой доски равна $v_1=0,8 v_0$?

9. С какой высоты брошен шарик, если он погрузился в воду на глубину $h=0,1$ м? Плотность шарика $\rho_{ш}=0,4 \cdot 10^3$ кг/м³, плотность воды $\rho_в=10^3$ кг/м³. Сопротивлением воздуха и воды пренебречь.

10. Конькобежец массой $M=60$ кг, стоя на коньках на льду, бросает в горизонтальном направлении камень массой $m=2$ кг со скоростью $v=9$ м/с. Найдите, на какое расстояние откатится конькобежец, если известно, что коэффициент трения коньков о лед $\mu=0,02$.

11. У основания наклонной плоскости, высота которой $H=1,2$ м и угол наклона к горизонту $\alpha=45^\circ$, закреплена массивная стальная плита. С вершины наклонной плоскости начинает скользить без начальной скорости стальная шайба. На какую высоту

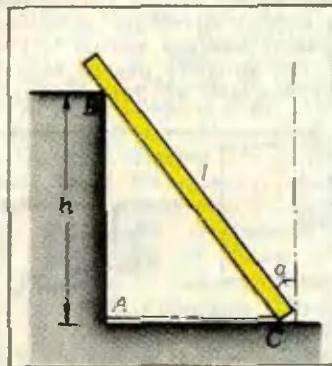


Рис. 4.

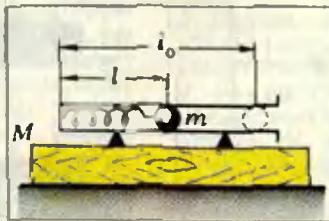


Рис. 5.

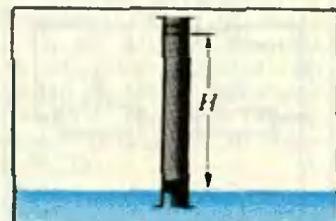


Рис. 6.

поднимется шайба после упругого удара о плиту, если коэффициент трения между шайбой и наклонной плоскостью $\mu=0,2$?

12. На дощечке укреплен ствол пружинного пистолета, заряженного шариком массы $m=20$ г (рис. 5). Дощечка, имеющая вместе со стволом массу $M=200$ г, положена на гладкий горизонтальный стол. Легкая пружинка жесткости $k=2,2 \cdot 10^2$ Н/м сжата до длины $l=5$ см при свободной длине $l_0=10$ см. Определите относительную скорость разлета шарика и дощечки после выстрела. Оцените время выстрела (время выталкивания шарика пружинкой).

Жидкости и газы

1. Полый цинковый шар ($\rho=-7,1 \cdot 10^3$ кг/м³), внешний объем которого $V=2 \cdot 10^{-4}$ м³, плавает твк, что половина его находится в воде. Найдите объем свободного пространства внутри шара.

2. Прямоугольный понтон, масса которого $M=700$ кг, имеет размеры: длину $l=5$ м, ширину $d=3$ м и высоту $h=0,7$ м. Найдите осадку понтона без нагрузки и предельную грузоподъемность при высоте бортов над ватерлинией $h'=0,2$ м.

3. В длинной вертикальной трубе с гладкими стенками, опущенной одним концом в воду, плавает легкий поршень (рис. 6). Площадь поршня $S=100$ см². Какую работу следует совершить, чтобы поршень медленно поднять до высоты $H=20$ м? Атмосферное давление $p_0=10^5$ Па, плотность воды $\rho=10^3$ кг/м³, а ускорение земного тяготения считать равным $g=10$ м/с².

Молекулярная физика.

Тепловые явления

1. Определите плотность воздуха при давлении $p=3,8 \cdot 10^4$ Па и температуре $t=0^\circ\text{C}$, если при нормальных условиях плотность воздуха $\rho_0=1,29$ кг/м³.

2. Объем комнаты $V=100$ м³. Какова масса вышедшего из комнаты воздуха при повышении температуры от $t_1=10^\circ\text{C}$ до $t_2=25^\circ\text{C}$, если атмосферное давление $p_a=102$ кПа? Плотность воздуха при нормальных условиях $\rho_0=1,29$ кг/м³.

3. Два сосуда одинакового объема $V=10^{-2}$ м³ соединены узкой трубой с краном. Кран закрыт. При одинаковой температуре $T=300$ К давление кислорода в одном сосуде равно $p_1=0,8 \cdot 10^5$ Па, во втором — $p_2=1,2 \cdot 10^5$ Па. Найдите массу газа, перешедшего из одного сосуда в другой при открытии крана, если температура осталась неизменной. Масса одного моля кислорода $\mu=0,032$ кг/моль, универсальная газовая постоянная $R=8,31$ Дж/(моль \cdot К).

4. Оцените расстояние между ближайшими ионами кубической решетки поваренной соли, если ее плотность $\rho = 2,18 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, а молярная масса $\mu = 0,058 \text{ кг/моль}$.

5. На нагреватель поставили открытый сосуд с водой. Через $t_1 = 40$ мин после начала кипения в сосуд добавили воду, масса которой равна массе выкипевшей за это время воды. При неизменных условиях нагрева вода в сосуде снова закипела спустя время $t_2 = 3$ мин. Какова была первоначальная температура добавленной воды? Удельная теплоемкость воды $c = 4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$, удельная теплота парообразования воды $L = 22,6 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$, атмосферное давление — нормальное.

6. При изготовлении дроби капли расплавленного свинца падают в воду с температурой $t_0 = 17^\circ\text{C}$. Определите массу свинца, которая доведет $m_0 = 1 \text{ кг}$ воды до температуры кипения $t_k = 100^\circ\text{C}$. Температура плавления свинца $t_{пл} = 327^\circ\text{C}$, удельная теплота плавления свинца $\lambda = 25 \text{ кДж/кг}$, удельная теплоемкость свинца $c = 0,126 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)}$, удельная теплоемкость воды $c_0 = 4,18 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)}$.

Основы электродинамики

1. Одинаковые по модулю ($q = 1,8 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$), но разные по знаку заряды расположены в двух вершинах равностороннего треугольника. Сторона треугольника $a = 2 \text{ м}$. Определите напряженность электрического поля в третьей вершине треугольника.

2. Атом водорода состоит из ядра, вокруг которого вращается единственный электрон. С какой частотой вращается электрон вокруг ядра, если его орбита — окружность с радиусом $r = 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$? Масса электрона $m = 9 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$, заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$, заряд ядра $q = e$, электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$.

3. Электрон со скоростью $v_0 = 13\,300 \text{ км/с}$ влетает в середину плоского конденсатора параллельно его пластинам и вылетает у края одной из пластин. Удельный заряд электрона $e/m = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$. Разность потенциалов между пластинами $U = 1000 \text{ В}$. Определите направление и модуль скорости вылета электрона из конденсатора.

4. Шарик массой $m = 1 \text{ г}$ перемещается из точки A , потенциал которой $\phi_A = 600 \text{ В}$, в точку B , потенциал которой $\phi_B = 0$. Определите скорость шарика в точке A , если в точке B его скорость $v_B = 20 \text{ см/с}$. Заряд шарика $q = 10^{-8} \text{ Кл}$.

5. Источник с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r включен в схему, изображен-

ную на рисунке 7. Найдите заряд конденсатора, если C , R_1 и R_2 известны.

6. Два источника тока соединены последовательно. ЭДС первого элемента $\mathcal{E}_1 = 2 \text{ В}$ и внутреннее сопротивление $r_1 = 0,5 \text{ Ом}$, ЭДС второго элемента $\mathcal{E}_2 = 1,2 \text{ В}$ и внутреннее сопротивление $r_2 = 1,5 \text{ Ом}$. Сопротивление внешней цепи $R = 5 \text{ Ом}$. Определите напряжение на внешнем участке цепи и напряжения на клеммах каждого источника.

7. Три электролитические ванны соединены так, как показано на рисунке 8. В двух из них имеется раствор AgNO_3 , в третьей — раствор CuSO_4 . Сколько серебра выделилось в первой ванне, если во второй выделилось $m_2 = 60,4 \text{ мг}$ серебра, а в третьей — $m_3 = 41,5 \text{ мг}$ меди? Электрохимический эквивалент серебра $k_{\text{Ag}} = 1,118 \text{ мг/Кл}$, меди — $k_{\text{Cu}} = 0,329 \text{ мг/Кл}$.

8. Электрон влетает в однородное магнитное поле со скоростью $v = 400 \text{ км/с}$ под углом $\alpha = 60^\circ$ к вектору магнитной индукции \vec{B} ($B = 10^{-3} \text{ Тл}$). Сколько витков опишет электрон вдоль магнитного поля на расстоянии $r = 10\,000 \text{ км}$? Удельный заряд электрона $e/m = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$.

9. Рамка, имеющая $r = 100$ витков площадью $S = 5 \text{ см}^2$ каждый, замкнута на гальванометр с сопротивлением $R = 10 \text{ кОм}$. Рамка находится в однородном поле с индукцией $B = 10^{-2} \text{ Тл}$, причем линии поля перпендикулярны к плоскости рамки. Какой заряд протечет по цепи гальванометра, если направление магнитного поля изменить на противоположное? Можно считать, что индукция магнитного поля с течением времени изменялась равномерно.

10. Над закрепленным проволочным кольцом с разрезом висит на нити магнит (рис. 9). Нить пережигают, и магнит пролетает сквозь кольцо. Определите относительные разности потенциалов между точками A и B в моменты прохождения плоскости кольца северного и южного концов магнита. Приведите качественный график зависимости разности потенциалов от времени, выбрав за начало отсчета момент пережигания нити.

Колебания и волны

1. Во сколько раз изменится период колебаний математического маятника при перенесении его с Земли на Луну? Масса Луны в 81 раз меньше массы Земли, а радиус Земли в 3,7 раза больше радиуса Луны.

2. Ракета поднимается вверх с ускорением $a = 3g$. Сколько полных колебаний совершит помещенный в ракету маятник длиной $l = 1 \text{ м}$ за время, в течение которого ракета поднимется на высоту $H = 1480 \text{ м}$? Зависимостью

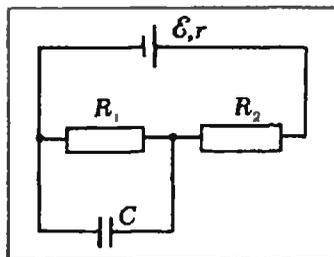


Рис. 7.

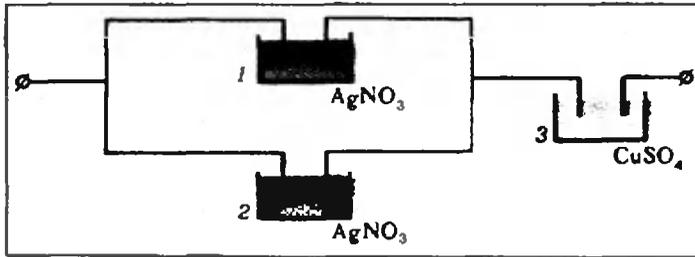


Рис. 8.

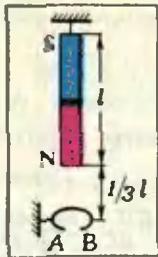


Рис. 9.

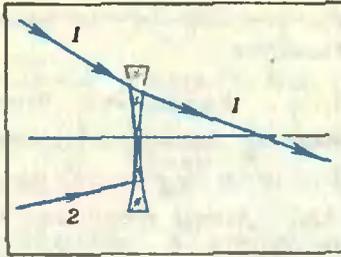


Рис. 10.

ускорения свободного падения от высоты пренебречь.

3. Шарик, имеющий массу $m = 10$ г и заряд $q = 2 \cdot 10^{-4}$ Кл, подвешен на нерастяжимой нити длиной $l = 25$ см в поле плоского горизонтального конденсатора. Разность потенциалов между пластинами конденсатора равна $U = 120$ В, расстояние между ними $d = 30$ см. Чему равен период колебаний шарика на нити?

4. Колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности и воздушного конденсатора, настроен на длину волны $\lambda_1 = 300$ м. При этом расстояние между пластинами конденсатора $d_1 = 4,8$ мм. Каким должно быть это расстояние, чтобы контур был настроен на длину волны $\lambda_2 = 240$ м?

Оптика

1. Два плоских зеркала образуют прямой двугранный угол. В плоскости, перпендикулярной ребру угла, на одно из зеркал падает луч света под углом $\alpha = 60^\circ$. Точка падения находится от ребра угла на расстоянии

$d = 10$ см. Определите угловые и линейные смещения двукратно отраженного луча по отношению к падающему.

2. На стеклянную пластину с показателем преломления $n = 1,5$ падает луч света. Каков угол падения луча, если угол между отраженным и преломленным лучами $\gamma = 90^\circ$?

3. Предельный угол полного отражения стекла на границе с воздухом равен $\alpha_{01} = 42^\circ$ ($\sin 42^\circ = 0,669$), а на границе с водой — $\alpha_{02} = 62^\circ 30'$ ($\sin 62^\circ 30' = 0,887$). Найдите скорость света в воде.

4. На дне сосуда, наполненного жидкостью до высоты h , находится точечный источник света. На поверхности плавает круглая непрозрачная пластинка таким образом, что ее центр находится над источником света. Какой наименьший радиус должна иметь эта пластинка, чтобы ни один луч не мог выйти через поверхность жидкости? Показатель преломления жидкости n .

5. На горизонтальном дне водоема лежит плоское зеркало. Какова глубина водоема, если луч, отраженный от зеркала, выходит на поверхность воды на расстоянии $l = 3$ м от места своего вхождения в воду? Угол падения луча на поверхность воды $\alpha = 30^\circ$, показатель преломления воды $n = 1,33$.

6. Собирающая линза дает действительное и увеличенное в $\Gamma = 2$ раза изображение предмета. Определите фокусное расстояние линзы, если расстояние между линзой и изображением предмета $f = 24$ см.

7. Ход луча I , прошедшего рассеивающую линзу, изображен на рисунке 10. В каком направлении пойдет луч 2 после линзы?

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 52)

72, 74, 75, 78; А. Малай (Каушания) 69, 74, 77, 78, 84; А. Марков (Москва) 85; Л. Маркович (Брест) 69, 70, 73—75, 85; С. Марук (Фрунзе) 70, 73—75; И. Медков (Москва) 74, 75, 77, 83—85; А. Мишуков (Железноводск) 84; В. Мороз (Минск) 73, 74, 77; Х. Муртазаев (Андижан) 75; С. Мусаев (Баку) 69, 70, 73, 74, 83, 85; Д. Набутовский (Новосибирск) 69, 71, 74, 77, 84, 85; О. Ницора (Горький) 85; А. Носков (Москва) 69; Я. Олейник (Москва) 69; С. Орлов (Москва) 69, 73, 75, 83, 86; А. Охалкии (Львов) 74; А. Павелъев (Фрязино) 85; И. Пильников (Тамбов) 74, 75, 84; Р. Погосян (Баку) 74; О. Пузырко (Пярну) 78, 83—85; М. Пустыльник (Свердловск) 69—75, 83, 84; Ш. Рзаев (Баку) 73, 74; С. Родионов (и. Болшево Московской обл.) 69, 73, 74; М. Розенберг (Ленинград) 69, 70, 73, 77, 78, 85; И. Розенвайн (Киев) 70, 74, 78, 84; В. Ромашин (Донецк) 69, 70, 74, 75, 77; В. Рыбенков (Махачкала) 69, 74, 75, 81, 84, 85; А. Рыляков (Саратов) 69—71, 73—75,

84, 85; В. Сабадаш (Киев) 85; Г. Самадашвили (Тбилиси) 73, 74, 78, 84, 85; В. Семенко (Киев) 69, 75, 84, 85; В. Сергеев (Караганда) 74, 75, 78; Ф. Серженко (Запорожье) 69, 72, 74, 75, 78, 83, 84; С. Симанов (Долгопрудный) 69, 71, 73—75, 78, 81, 83, 84; М. Скорик (Киев) 72, 74, 75, 78, 83, 85; Я. Соболевский (Киев) 84, 85; Р. Сулейманов (Ягнбад) 81; А. Сурков (Ленинград) 71; Т. Терещенко (Киев) 84; О. Третьяков (Омск) 83—86; О. Фатьянов (Курск) 69—75, 78—85; Н. Федин (Омск) 69, 70, 72—78, 83, 85; В. Фельдман (Саратов) 70, 74—76, 84; Л. Фельдман (Саратов) 74, 75, 81, 84; О. Фирсов (Сухуми) 75; Ю. Чаплыгин (Валуйки) 69—71, 74, 75, 78, 81, 83, 85; О. Чернышев (Тольятти) 73; А. Чудновский (Киев) 73, 74; М. Шамонин (Кемерово) 86; Д. Шаповалов (Джезказган) 85; М. Шепетько (Давид-Городок) 73, 75, 81; Ю. Шефтель (Киев) 73, 78; М. Шнайдер (Винница) 81; И. Шойхет (Ташкент) 73, 85; Ю. Щербаков (Запорожье) 69, 74, 78; С. Юровский (Мытищи) 75; М. Яновский (Киев) 85; И. Яцун (Днепропетровск) 74, 75.

Ответы, указания, решения



Задачи вступительных экзаменов по математике и физике в различные вузы в 1982 году

Математика

Письменный экзамен

Алгебра

1. 150 г и 450 г. 2. 6,4 км/ч. 3. 9 4.

а) $2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$; б) $\frac{2\sqrt{a}}{a^2(a+1)}$. 6. $x = \sqrt{\frac{4\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}}$.

9. 16. 10. а) $\left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$; б) $\{-1, 2\}$; в) $\{1\}$;

г) $\{0\}$; д) $\{2\}$; е) $\{2, 8\}$; ж) $\{2\sqrt{2}, 4\}$;

з) $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi l$ ($k, l \in \mathbb{Z}$);

и) $x_1 = \pi k$, $x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi l$ ($k, l \in \mathbb{Z}$); к) $x =$

$= \pi + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$); л) $x_1 = \pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{16} +$

$+\frac{\pi}{8} l$ ($k, l \in \mathbb{Z}$); м) $x = -\frac{\pi}{18} \pm \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} k$

($k \in \mathbb{Z}$). 11. $\frac{7}{12}\pi$, $\frac{11}{12}\pi$. 12. $-\frac{\pi}{3}$.

13. $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$, $(\pi; 0)$. 14. а) $-1, 1$;

б) $]-\frac{1}{3}; 0[\cup]0; 9[$; в) $]-\frac{4}{3}; \frac{14}{9} \cup]\frac{14}{9}; 3[$.

15. а) $\left\{\left(-\frac{1}{2}; -2\right)\right\}$; б) $\{(3; -3)\}$.

16. $x=3$, $y=-1$. 17. а) $] -3; -\frac{1}{3}[$;

б) $[6; +\infty[$; в) $] -\infty; 0 \cup]0; +\infty[$;

г) \mathbb{R} ; д) $]1; 4[$; е) $] -\frac{1}{2}; 0 \cup]\frac{3}{2}; \frac{7}{4}[$.

19. $a = \pm\sqrt[3]{15}$, $\left[-\frac{3}{4}; 3\right]$. 20. а) $] -\infty;$

$-5[\cup]5; 6 \cup]6; +\infty[$; б) $] -1; 0 \cup]$

$0; 2[$; в) $] \frac{3}{2}; 2 \cup]2; 3[$; г) $] 2\pi; 9[$.

Анализ

1. 0. 2. $y = -2x + 3$, $\arctg 3$. 3. $y = 2x - 4$

и $y = 6x - 16$. 4. $] 0; \frac{2}{3}\sqrt[3]{4}[$. 5. Промежутки

возрастания — $] -\infty; 0[$, $]2; +\infty[$, промежутки

убывания — $[0; 2]$. 7. $x_1 = \pi + 2\pi k$,

$x_2 = \pm \frac{4}{3}\pi + 4\pi l$ ($k, l \in \mathbb{Z}$). 8. $x=1$ — точка

максимума, $x=2$ — точка минимума. 9. $\max f(x) = f(1) = 9$, $\min f(x) = f(0) = 5$.

$]-1; 1]$ $]-1; 1]$

10. 0. 13. $C(1; 28)$. 14. $x_0 = 3$. 15. $\frac{\pi}{3}$. 16. 4.

17. $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi} Q$. 18. $\arccos(\sqrt{2}-1)$.

Геометрия

1. $\frac{\pi}{7}$. Указание. Через точку K проведите прямую, параллельную (CM) .

2. $2 \arccos \frac{l(a+b)}{2ab}$. Указание. Пусть

ABC — данный треугольник и CD — данная биссектриса. К треугольникам BCD , ACD и ABC примените теорему синусов.

3. $6(1+\sqrt{3})$. 4. $\frac{S}{6}$. Указание. Медианы

треугольника разбивают его на 6 треугольников одинаковой площади.

5. $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}}} Q$. 6. 120° .

7. $\frac{1}{2 \cos 15^\circ} = \sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$. За-

мечание. Искомая величина полностью определяется данными плоскими углами.

9. $\frac{a^2\sqrt{3}(1+2\sin \alpha)}{4 \cos \alpha}$. 10. $\frac{\sqrt{3}}{2} a^2$.

11. $\frac{a^2}{6} \sin \alpha \sqrt{9 + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 \beta}$.

Устный экзамен

Алгебра

1. $\frac{3a+1}{a+3}$. 2. $\frac{1}{3} \lg 64 + \lg 0,25 = 0 > \lg 0,3$.

3. $\sin 0 < \sin 3 < \sin 1$. 4. а) $\frac{1}{2}$; б) 1; в) 0.

6. $a_5 = \sqrt{2}$. 7. а) \emptyset ; б) $\{7\}$; в) $\left\{-\frac{17}{13}, \frac{17}{13}\right\}$;

г) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$; д) $\{0\}$; е) $\{10\}$; ж) $\{10\}$; з) $\{9\}$;

и) $\{2\}$; к) $\{0, 2\}$; л) $x_1 = -\frac{5}{6} + \frac{\pi}{3} k$,

$x_2 = \frac{5}{4} + \frac{\pi}{2} l$ ($k, l \in \mathbb{Z}$); м) $x_1 = \frac{\pi}{2} k$, $x_2 =$

$= \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} l$ ($k, l \in \mathbb{Z}$); н) $\{0\}$; о) $x_1 =$

$= \frac{(-1)^k}{2} \arcsin 0,96 + \frac{\pi}{2} k$, $x_2 = \frac{(-1)^{l+1}}{2} \times$

$\times \arcsin 0,96 + \frac{\pi}{2} l$ ($k, l \in \mathbb{Z}$); п) $x = \frac{\pi}{2} +$

$+ 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$); р) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k$ ($k \in \mathbb{Z}$); с) \emptyset

при $a=1$, \mathbb{R} при $a=-1$, $\left\{\frac{1}{a-1}\right\}$ при

$|a| \neq 1$. 8. $] 3; \frac{7}{2}[$. 9. а) $\{(4; 4; -4)\}$;

б) $\left\{\left(\frac{1}{2}; 4\right)\right\}$; в) $\left\{\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right), (3; 9)\right\}$.

10. а) $] -2; \frac{3}{2} \cup]5; +\infty[$; б) $] -\infty;$

$-1 \cup]0; 1 \cup]1; +\infty[$; в) $] -\infty;$

$-2 \cup]14; +\infty[$; г) $] 0; 2 - \log_2 3 \cup]1;$

$+ \infty[$; д) $] -\infty; -3 \cup]\frac{5}{3}; +\infty[$;

- е) $] 1; +\infty [$; ж) $] \frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2} [\cup] 1; \frac{3+\sqrt{5}}{2} [$; з) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k (k=7, 8, 9, \dots)$;
 и) $] \frac{1}{2}; 1 [$; к) $[-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{7}{6}\pi + 2\pi k [$ ($k \in \mathbb{Z}$); л) $] \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k [$ ($k \in \mathbb{Z}$). 11. а) См. рис. 1; б) См. рис. 2; в) См. рис. 3.
 12. а) $-\sqrt{21}, \sqrt{21}$; б) $]-\infty; -25 [\cup] 1; +\infty [$. 13. $a=-3, b=2$. 14. а) $] -1; +\infty [$; б) $] -\infty; 0 [$. 15. а) $] 2; 4 [\cup] 4; 5 [$; б) $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k [$ ($k \in \mathbb{Z}$);
 в) $] -\infty; \frac{1}{2} [$. 16. $[\sqrt{5}; \sqrt{15}]$.

17. а) Указание. $\sqrt{x^2} = |x|$; б) Указание. В одной и той же системе координат постройте последовательно графики функций $\log_{0,5} x, \log_{0,5} |x|, \log_{0,5} |2x-1|$, $\log_{0,5} |2x-1| + 2$. 18. $A(-1; 3)$ и $A'(-1; -3), B(-4; -3)$ и $B'(-4; 3)$.

Анализ

1. -1 . 2. $-3,6 \sin 1,8x + \cos 2x$. 3. $y=4x-8$.
 4. $y=-4x+3$ и $y=4x-13$. 5. а) Промежутки возрастания — $] -\infty; -2 [$ и $] 2; +\infty [$; промежутки убывания — $[-2; 0 [$ и $] 0; 2 [$;
 б) Убывает на \mathbb{R} . 6. $\max f(x) = f(0) = -2$.
 [0, 2]

7. 16 см и $4\sqrt{3}$ см.

Геометрия

1. $\frac{bc}{b+c} \sqrt{2}$. 3. $\frac{1+\sin \frac{\alpha}{2}}{1-\sin \frac{\alpha}{2}}$. 4. $(\sqrt{2}-1)R$.
 5. а) $] 2a; 2(a+b) [$; б) $] \frac{a}{2}; +\infty [$.
 6. $] 0; \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} [$. 7. $2(\sqrt{2}-1)S$. 8. $\vec{PD} = -2\vec{PA} + 2\vec{PB}$. 9. $\vec{d} = -\frac{3}{2}\vec{b} - 3\vec{c}$. 10. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$.

11. Потому что $V = 1/3rS$ (V — объем многогранника, r — радиус вписанного в него шара, S — площадь его поверхности).

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. 1а, 2а, 3б, 4г, 5д, 6в, 7б, 8а, 9б, 10б.
 III. 1. $E = mg(v_0 t - gt^2/2) = 160$ Дж. 2. $\rho = -1,6 \cdot 10^5/V$. 3. $Q = U_m^2 \tau / (2R) = 67,5$ кДж.
 4. $r = h/\sqrt{\pi^2 - 1} \approx 2,28$ м.

Вариант 2

4. $t = l/v_0 = 3$ с. 5. $t = U^2 \tau \eta S / (cm \Delta t_0) \approx 2,8$ м.

Задачи устного экзамена

Механика

1. Возможны два случая: а) камень брошен вниз под углом $\alpha = 1/2 \operatorname{arctg}(1/2)$ к горизонту; б) камень брошен вверх под углом $\alpha = -90^\circ - 1/2 \operatorname{arctg}(1/2)$ к горизонту.

2. $x = \frac{2\pi}{T} \sqrt{\frac{2h^3}{g}} \approx 4,5$ см.

3. $\mu = \operatorname{tg} \alpha \approx 0,58$.

4. $T' = F - T = 70$ Н.

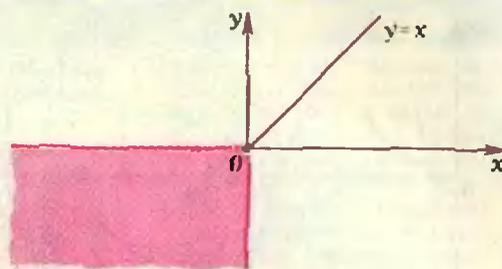


Рис. 1

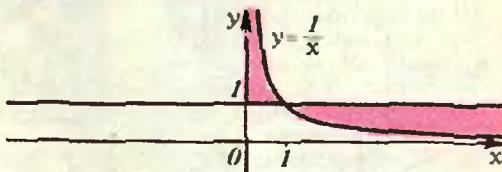


Рис. 2

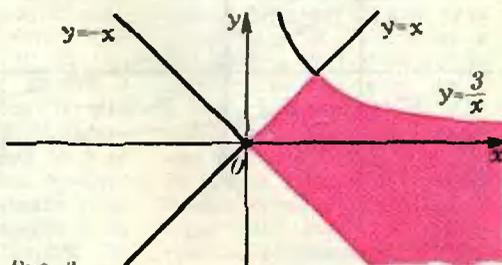


Рис. 3

5. $T \approx 150$ Н; $F_C \approx 513$ Н; $F_B \approx 173$ Н.

6. $x = 7/9$; $y = 4/9$.

7. При одновременном прыжке в одну сторону: $v = 2mu / (M+m) = 2$ м/с; в разные стороны: $v = 0$; при последовательных прыжках в одну сторону: $v = u(m / (M+m) + m / (M+2m)) = -2,2$ м/с; в разные стороны: $v = um^2 / (M(M+2m)) = 0,25$ м/с.

8. Пуля застрянет в третьей доске.

9. $H = h(q_0 - q_{01}) / q_{01} = 0,15$ м.

10. $s = m^2 v^2 / (2\mu g M^2) \approx 0,23$ м.

11. $h = H(\operatorname{tg} \alpha - \mu) / (\operatorname{tg} \alpha + \mu) = 0,8$ м.

12. $v_{отн} = (l_0 - l) \sqrt{k(M+m) / (mM)} = 5,5$ м/с;

по расчету колебаний пружинного маятника

$t = \pi/2 \sqrt{mM / (k(M+m))} \approx 1,4$ с, а по расчету

максимальной силы действия пружины $t =$

$= \sqrt{2} \sqrt{mM} / (k(M+m)) \approx 1,3$ с.

Жидкости и газы

1. $V' = V(1 - \rho_n / (2\rho)) = 1,86 \cdot 10^{-4}$ м³.

2. $h_0 = M / (\rho_0 l d) \approx 5$ см; $m = \rho_0 l d (h - h') - M = 6,8 \cdot 10^3$ кг $\approx 6,8$ т.

3. $A = \rho_0 S (H - h) + \rho_0 S h / 2 = 1,5 \cdot 10^4$ Дж.

Молекулярная физика. Тепловые явления

1. $\rho \approx \rho_0 p / p_0 = 0,48$ кг/м³.

2. $m = \frac{\rho_2 V \rho_0 T_0}{\rho_0} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) = 6,35$ кг.

3. $\Delta m = \mu (\rho_2 - \rho_1) V / (2RT) \approx 2,6 \cdot 10^{-3}$ кг.

4. $r = \sqrt[3]{\mu / (2Q N_A)} \approx 2,8 \cdot 10^{-10}$ м, где $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹ — число Авогадро.

5. $T = T_x - L \tau_2 / (c \tau_1) \approx 333$ К, или $t \approx 60^\circ \text{C}$.

6. $m = \frac{c_0 (t_n - t_0)}{\lambda + c(t_{пл} - t_x)} \approx 6,5$ кг.

Основы электродинамики

1. $E = 2q \cos 60^\circ / (4\pi \epsilon_0 a^2) = 40,5$ В/м.

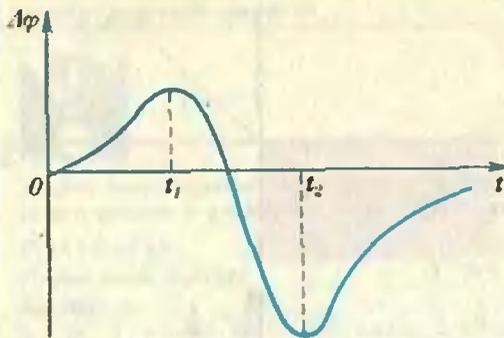


Рис. 4.

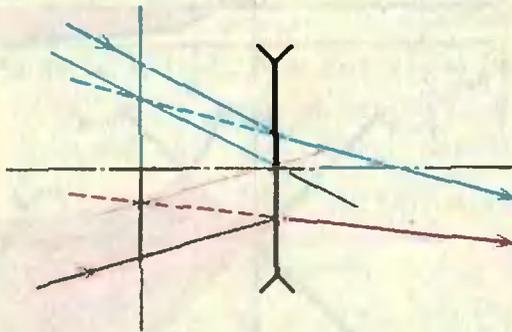


Рис. 5.

- $\omega = e / (r\sqrt{4\pi\epsilon_0 r m}) \approx 0,3 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}$.
- $\alpha = \arctg \sqrt{eU/mv_0^2} = 45^\circ$; $v = v_0 / \sin \alpha \approx 18800 \text{ км/с}$.
- $v_A = \sqrt{v_0^2 - 2q\varphi_A/m} \approx 0,17 \text{ м/с}$.
- $q = C \mathcal{E} R_1 / (r + R_1 + R_2)$.

- $U = \frac{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)R}{r_1 + r_2 + R} \approx 2,3 \text{ В}$;
- $U_1 = \frac{\mathcal{E}_1(r_2 + R) - \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2 + R} \approx 1,8 \text{ В}$;
- $U_2 = \frac{\mathcal{E}_2(r_1 + R) - \mathcal{E}_1 r_2}{r_1 + r_2 + R} \approx 0,5 \text{ В}$;
- $m_1 = m_3 k_c / k_m - m_2 \approx 80,6 \text{ мг}$.
- $n = \frac{rcB}{2\pi m v \cos \alpha} \approx 1,4 \cdot 10^9$.
- $q = 2BSn/R = 10^{-7} \text{ Кл}$.
- $\Delta\varphi_1/\Delta\varphi_2 = 1/2$ (см. рис. 4).

Колебания и волны

- $T_1/T_3 = \sqrt{81/3,7} = 2,4$.

$$2. N = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{H}{2l} \left(1 + \frac{g}{a}\right)} = 10.$$

- $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + Uq/(rm)}} \approx 0,74 \text{ с}$, если вектор напряженности поля направлен вниз;

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g - Uq/(rm)}} \approx 2,34 \text{ с}, \text{ если вектор напряженности поля направлен вверх.}$$

- $d_2 = d_1 (\lambda_1/\lambda_2)^2 = 7,5 \text{ мм}$.

Оптика

- $\gamma = 180^\circ$; $h = d = 10 \text{ см}$.
- $\alpha = \arctg n \approx 56^\circ$.
- $v_n = c \sin \alpha_{01} / \sin \alpha_{02} \approx 2,26 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.
- $R = h / \sqrt{n^2 - 1}$.
- $H = l \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} / (2 \sin \alpha) \approx 3,7 \text{ м}$.
- $F = f / (f + l) = 8 \text{ см}$.
- См. рис. 5.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтынский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гиеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбиллин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никвизин, С. П. Новиков, М. К. Погапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родица, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уровев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капница, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаяев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, А. В. Перышкин, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Суриц, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер оформили: М. К. Гуров, М. В. Дубах, Ю. П. Мартыненко, Э. В. Назаров, А. М. Пономарева, В. М. Скрыдел, И. Е. Смирнова, Е. К. Темчурина, Е. К. Чивиков Фото В. П. Шевченко

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Главный художник Э. А. Смирнов
Художественные редакторы Т. М. Макарова, Е. В. Миронова
Корректор Е. В. Сидоркина

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250-38-54

Сдано в набор 18.04.83.
Подписано в печать 20.05.83. Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,09. Т-08400.
Тираж 172603 экз.
Цена 40 коп. Заказ 965.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательства, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

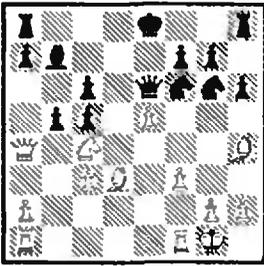


Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ТРИ ЭПИЗОДА С ЖЕРТВОЙ ФЕРЗЯ

Самые красивые и яркие комбинации на шахматной доске — те, в которых одна из сторон приносит в жертву ферзя (см. «Квант», 1982, № 10). Сегодня мы вновь возвращаемся к этой теме.

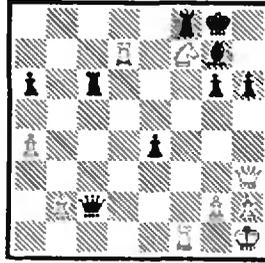
М. Таль — А. Хект
(Шахматная Олимпиада, 1962 г.)



19. e4! ba. Итак, с ферзем белые расстались, но это еще не конец. 20. fg Лg8 21. Сf5!! В случае взятия на c4 (или f5) белые, не имея даже пешки за ферзя, быстро достигали цели, например: 21...Ф:c4 22. Лfе1 + Фе6 23. Л:е6 + fe 24. С:g6 + Крd7 25. Лd1 + Крc7 26. Сg3 + Крb6 27. Лb1 + Кра6 28. Сd3 + Кра5 29. Сc7 x. Жаль, что этот симпатичный вариант не понравился черным. Избранное продолжение все равно их не спасло, а в эстетическом отношении поединок явно потерял. 21...К:h4 22. Се6 Са6 23. Кd6 + Крe7 24. Сc4! У белых решающий перевес, который они и довели до победы.

В следующем эпизоде, участником которого тоже был Михаил Таль, жертва ферзя осталась за кулисами. Дело происходило вновь на олимпиаде, но спустя ровно 20 лет.

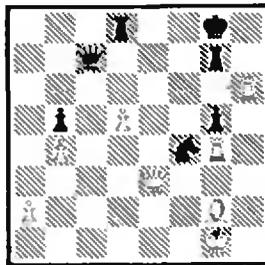
Л. Шнайдер — М. Таль
(Шахматная Олимпиада, 1982 г.)



Обнаружив, что 30. К:h6 + С:h6 31. Л:f8 + Кр:f8 32. Ф:h6 + Крe8 черным не опасно, шведский шахматист сделал «форточку» — 30. g3. Однако следовало 30...h5! и после 31. Kg5 Ф:b2 32. Ке6 Л:f1 + 33. Ф:f1 Сf6! 34. Лd8 + Крf7 35. Kg5 + Крe7 36. К:e4 Кр:d8 белые сдались. А между тем они могли создать «бессмертное произведение» — 30. Ф:h6!! Лf6 (30...С:h6 31. К:h6 + Крh8 32. Л:f8 x, 30...Л:f7 31. Лd8 +) 31. Фh8+!! Черные были бы вынуждены принять жертву и после 31...С:h8 получить эффектный «эполетный мат» — 32. Kh6 x (эполеты — черная ладья и слон, из-за которых король не может сдвинуться с места).

И еще один случай — из партии ведущего страничку.

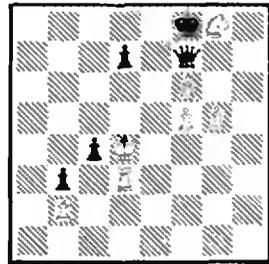
Е. Гик — М. Мухни
(Москва, 1969 г.)



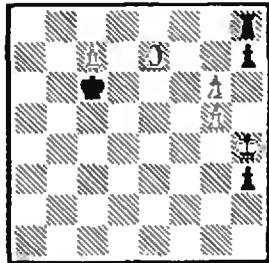
В этом положении партия была отложена, а когда судья вскрыл конверт, я едва сумел сдержать радость. Записанный ход 41...Фc2 позволял мне провести красивую домашнюю заготовку: 42. Л:f4! gf43. Фе6 + Лf7 44. Лg5 + Крf8 45. Фg4 Фf5 46. Лg8 + Крe7 47. Фе2 + Крd7 48. Фе6 + l и т. д. Но мой расчет был слишком далеким. Едва я взял коня 42. Л:f4, как моментально последовало ошеломляющее 42...Ф:g2+!!

Когда сознание ко мне вернулось, я убедился, что остаюсь без чистой ладьи — 43. Кр:g2 gf+ и 44...fe. Ну кто мог ожидать от партнера такого коварного сюрприза! Пришлось немедленно сдаться. Кстати, когда каждый из нас показывал отложенную позицию своим товарищам, все они предлагали за белых «решающее» взятие ладьи на f4. Полезный материал для психологов! Мой партнер Михаил Мухни был чрезвычайно талантливым шахматистом. К сожалению, он не успел стать гроссмейстером, так как очень рано умер. В 1972 году в чемпионате страны он разделил третье — пятое места с третьестепенными В. Савоном и Г. Кузьминым (звание чемпиона СССР завоевал М. Таль). Почти все участники турнира, оказавшиеся ниже его, либо уже были гроссмейстерами, либо вскоре стали ими. В дополнительном двухкруговом матч-турнире Мухни не уступил Кузьмину и Савону, все трое набрали по 2 очка, и лишь худший коэффициент помешал Мухни выйти в межзоональный турнир.

Конкурсные задания

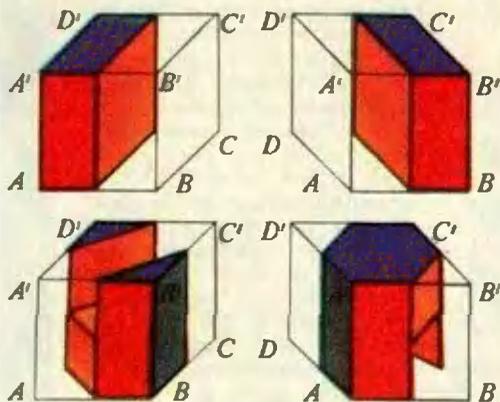


11. Выигрыш.



12. Выигрыш.

Срок отправки решений — 25 августа 1983 года (с пометкой на открытке: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 11, 12»).



Предлагаем небольшой тест на проверку пространственного воображения. Слева показаны два куба: верхний разрезан на две одинаковые части, нижний — на две неконгруэнтные части. Ниже показаны пятнадцать кубов, каждый из которых разрезан на две части, причем все «первые половинки» обозначены числами 1—15, а все «вторые половинки» обозначены (в другом порядке) буквами а — п. Для каждой из половинок 1—15 найдите ее пару среди а — п.

В. Ф. КАНЕВ

